دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي

# الرياضيات

# ٩
الجزء الأول

مركز المناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي

# الرياضيـــــات

## للصف التاسع الأساسي

## الجزء الأول


## المؤلفون

د. علي بركات «منسقاً»

د. حسن يوسف

د. جاسر صرصور

د. فواز أبو دياك

فيصل قدسي

نزيه عودة

سهيل صالحة (مركز المناهج)

قررت وزارة التربية والتعليم العالي في دولة فلسطين
تدريس هذا الكتاب في مدارسها للصف التاسع الأساسي بدءاً من العام الدراسي ٢٠٠٣/ ٢٠٠٤م

## الإشـراف العام

**رئيس لجنـة المناهج** – د. نعيم أبو الحمص
**مدير عام مركز المناهج** – د. صلاح ياسين

## مركـز المناهج

**إشراف تربوي** : د.عمر أبوالحمص

### الدائرة الفنية

- **إشـراف إداري** : رائـد بركـات
- **تصـميـم** : عاصم ناصر
- **الإعداد المحوسب للطباعة** : م. حـمدان بحـبوح
- **تنضيد** : أمينة سالم

- **قام بإدخال التعديلات على الطبعة الثانية التجريبية:** أ. محمد عالية، أ. فيصل قدسي (مركز المناهج)

## الفريق الوطني لمنهاج الرياضيات:

| | | |
|---|---|---|
| د. فطين مسعد «منسقاً» | د. الياس ضبيط | شهناز الفـــار |
| علي خليل حمد | د. علي خليـفة | ليانا جابـــر |
| د. محمد حمدان | محمد مقبـــل | وائل كشـــك |

**الطبعة الثانية التجريبية**
٢٠٠٤م/ ١٤٢٥ هـ
© جميع حقوق الطبـع محفوظة لوزارة التربية والتعليم العالي/ مركز المناهـج
مركز المناهج – شارع مكة – ص .ب ٧١٩ – البيرة رام الله – فلسطين
تلفون ٢٢٤٠٦١٧٤(٩٧٠) فاكس ٢٢٤٠١٥٥٠(٩٧٠)
E-mail: PCDC@PALNET.COM

## تمهيد

رأت وزارة التربية والتعليم العالي ضرورة وضع منهاج يراعي الخصوصية الفلسطينية؛ لتحقيق طموحات الشعب الفلسطيني حتى يأخذ مكانه بين الشعوب. إن بناء منهاج فلسطيني يعد أساساً مهمّاً لبناء السيادة الوطنية للشعب الفلسطيني وأساساً لترسيخ القيم والديموقراطية، وهو حق إنساني، وأداة تنمية الموارد البشرية المستدامة التي رسختها مبادئ الخطة الخمسية للوزارة.

وتكمن أهمية المنهاج في أنه الوسيلة الرئيسة للتعليم التي من خلالها تتحقق أهداف المجتمع؛ لذا تولي الوزارة عناية خاصة بالكتاب المدرسي، أحد عناصر المنهاج؛ لأنه المصدر الوسيط للتعلم، والأداة الأولى بيد المعلم والطالب، إضافة إلى غيره من وسائل التعلم: الإنترنت والحاسوب والثقافة المحلية والتعلم الأسري وغيرها من الوسائط المساعدة.

أقرت الوزارة هذا العام (٢٠٠٤/ ٢٠٠٥) تطبيق المرحلة الخامسة من خطتها للمنهاج الفلسطيني لكتب الصفين الخامس والعاشر الأساسيين، بالإضافة إلى تطوير كتب المراحل السابقة وهي للصفوف الأساسية من الأول إلى الرابع، ومن السادس إلى التاسع، وستتبعها كتب المرحلة الثانوية.

وتعد الكتب المدرسية وأدلة المعلم التي أنجزت للصفوف العشرة حتى الآن، وعددها يقارب ٢٣٠ كتاباً، ركيزة أساسية في عملية التعليم والتعلم، بما تشتمل عليه من بيانات ومعلومات عُرضت بأسلوب سهل ومنطقي؛ لتوفير خبرات متنوعة، تتضمن مؤشرات واضحة، تتصل بطرائق التدريس، والوسائل والأنشطة وأساليب التقويم، وتتلاءم مع مبادئ الخطة الخمسية المذكورة أعلاه.

وتتم مراجعة الكتب وتنقيحها وإثراؤها سنوياً بمشاركة التربويين والمعلمين الذين يقومون بتدريسها، وترى الوزارة الطبعات من الأولى إلى الرابعة طبعات تجريبية قابلة للتعديل والتطوير؛ كي تتلاءم مع التغيرات في التقدم العلمي والتكنولوجي ومهارات الحياة. إن قيمة الكتاب المدرسي الفلسطيني تزداد بمقدار ما تبذل فيه من جهود ومن مشاركة أكبر عدد ممكن من المتخصصين في مجال إعداد الكتب المدرسية، الذين يحدثون تغييراً جوهريّاً في التعليم، من خلال العمليات الواسعة من المراجعة، بمنهجية رسخها مركز المناهج في مجالي التأليف والإخراج في طرفي الوطن الذي يعمل على توحيده.

إن وزارة التربية والتعليم العالي لايسعها إلا أن تتقدم بجزيل الشكر والتقدير إلى المؤسسات والمنظمات الدولية، والدول العربية والصديقة وبخاصة حكومة بلجيكا؛ لدعمها المالي لمشروع المناهج.

كما أن الوزارة لتفخر بالكفاءات التربوية الوطنية، التي شاركت في إنجاز هذا العمل الوطني التاريخي من خلال اللجان التربوية، التي تقوم بإعداد الكتب المدرسية، وتشكرهم على مشاركتهم بجهودهم المميزة، كلاً حسب موقعه، وتشمل لجان المناهج الوزارية، ومركز المناهج، والإقرار، والمؤلفين، والمحررين، والمشاركين بورشات العمل، والمصممين، والرسامين، والمراجعين، والطابعين، والمشاركين في إثراء الكتب المدرسية من الميدان أثناء التطبيق.

**وزارة التربية والتعليم العالي**
**مركز المناهج**
**أيلول ٢٠٠٤ م**

# مقدمـــة

هذا هو الكتاب الأول لرياضيات الصف التاسع الأساسي (الطبعة الثانية التجريبية)، وفق خطة المنهاج الفلسطيني الأول، وبما اشتملت عليه هذه الخطة من مبادىء وأسس.

وقد اعتمد الكتاب على نشاط الطالب وعمله في بناء المفاهيم وتعلمها، وقد جاء الكتاب معتدلاً في صفحاته وموضوعاته، وترتيب دروسه، وتمارينه ومسائله، ويتضمن هذا الكتاب خمس وحدات، تعرض الوحدة الأولى «الهندسة التحليلية»: نظام الإحداثيات في المستوى الديكارتي، وطول القطعة المستقيمة وإحداثيات منتصفها، وميل الخط المستقيم ومعادلته ورسمه البياني وأخيراً معادلة الدائرة.

وتعرض الوحدة الثانية «المعادلات والمتباينات»: تمثيل المعادلة بيانيّاً وحلها، وتمثيل المتباينة وحلها، وحل نظام من المعادلات أو المتباينات بعدّة طرق.

وتتناول الوحدة الثالثة «الدائرة»، مفاهيم أساسيّة مثل: الزاوية المحيطيّة والزاوية المركزيّة، والشكل الرباعي الدائري، وأوتار الدائرة وخصائصها، وخواص المماس.

أما الوحدة الرابعة «التحويلات الهندسيّة»، فتصف التحويلات الأساسيّة (الانعكاس، والانسحاب، والدوران، والتمدد)، وتأثيراتها على النقاط والأشكال الهندسيّة.

وأخيراً تغطي الوحدة الخامسة «الإحصاء»، مقاييس التشتت: المدى، والانحراف المعياري، والتباين، كما تعطي فكرة عن حساب المئينات.

وقد أرفقنا لهذه الوحدة ملحقاً اختيارياً، يوضح كيفيّة استخدام الحاسوب في حساب التباين، والانحراف المعياري باستخدام برنامج «Excel». ويمكن استخدام برمجيّات أخرى في حساب التباين والانحراف المعياري.

وفقنا الله لما فيه مصلحة أمتنا وطلبتنا ومعلمينا، وتقدمهم في تعلم وتعليم الرياضيات.

والله ولي التوفيق

المؤلفون

# المحتويات

الوحدة

# ١

# الهندسة التحليلية

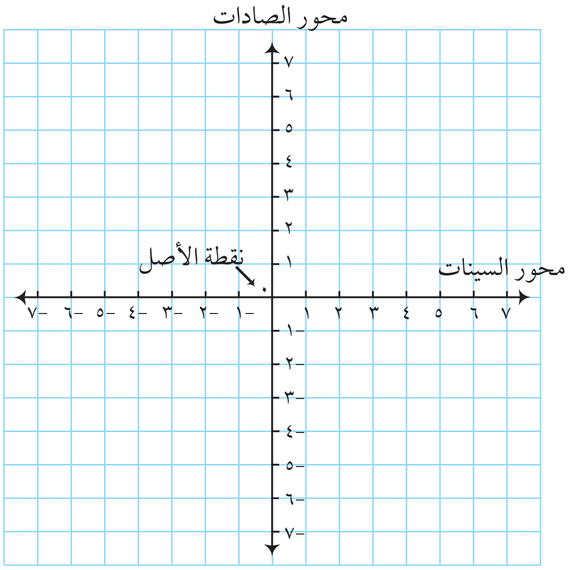
## ١ - ١ الإحداثيات الديكارتية المتعامدة في المستوى

يمثل الشكل (١-١) نظاماً من الإحداثيات ناتجاً عن تقاطع خطي الأعداد المتعامدين ؛ الخط الأفقي ويُسمّى محور السينات ، والخط الرأسي ويُسمّى محور الصادات ، وتُسمى نقطة تقاطعهما نقطة الأصل ، أما المستوى الناتج فيُسمّى المستوى الإحداثي أو المستوى الديكارتي .

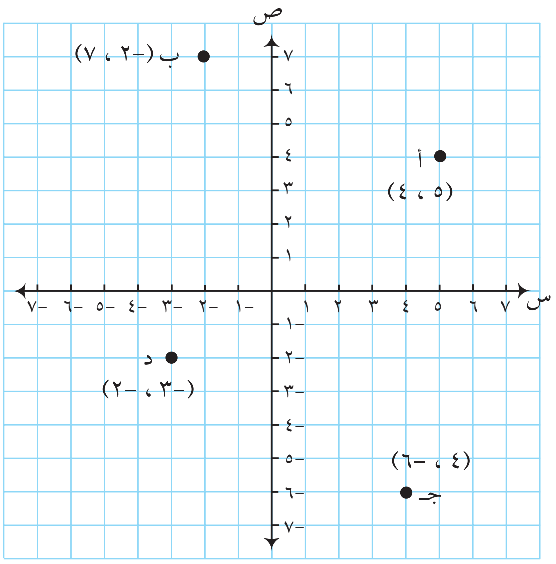
كل نقطة في المستوى الإحداثي ، تقابل زوجاً مرتباً من الأعداد الحقيقية ، مسقطه الأول يُسمى الإحداثي السيني ، ومسقطه الثاني يُسمّى الإحداثي الصادي ، ويرمز له بالرمز (س ، ص) وكل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية ، يقابل نقطة واحدة فقط في مستوى المحورين الإحداثيين .

في الشكل (١-٢) تم تمثيل الأزواج المرتبة (٥ ، ٤) ، (-٢ ، ٧) ، (٤ ، -٦) ، (-٣ ، -٢) بالنقاط أ ، ب ، جـ ، د على الترتيب .

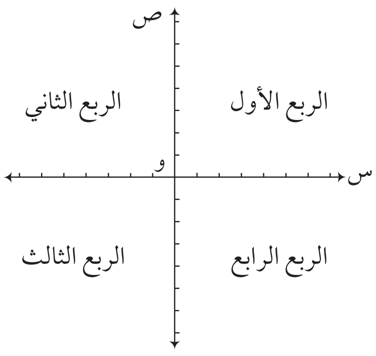
وقد قُسّمَ المستوى إلى أربعة أقسام بالمحورين الإحداثيين يسمى كل قسم منها رُبعاً ، وتُرقم بعكس اتجاه عقارب الساعة كما في الشكل (١-٣) ، كذلك يكون الاتجاه الموجب للمحور السيني على يمين نقطة الأصل (و) ، والاتجاه السالب يكون على يسارها ، والاتجاه الموجب للمحور الصادي يكون أعلى نقطة الأصل (و) والاتجاه السالب يكون أسفلها .




الشكل (١-١)




الشكل (١-٢)

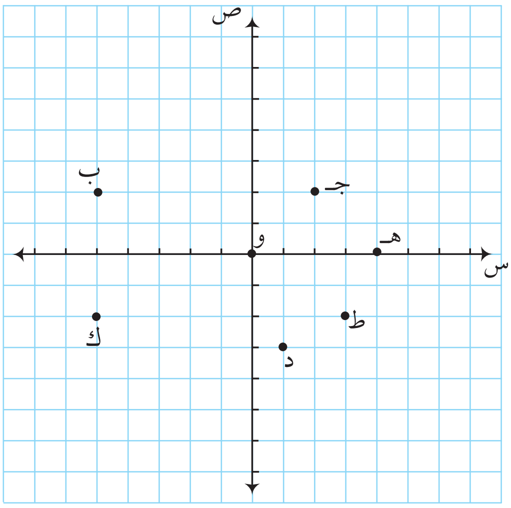



الشكل (١-٣)

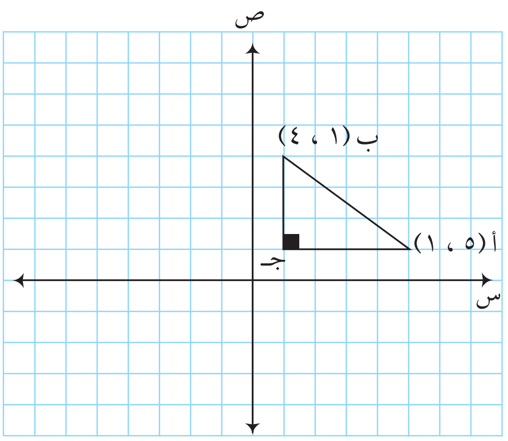
## تدريبات صفّية

أرسم محورين متعامدين على ورقة رسم بياني، وأعيّن في المستوى الديكارتي النقاط: أ (٤ ، -١)، ب (٤ ، ٥)، جـ (-٢ ، -٣)، د (٠ ، ٤)، هـ (-٧ ، ٠)، و (٠ ، -٤).

## تمارين ومسائل



الشكل (١-٤)



الشكل (١-٥)

١ أعتمد الشكل (١-٤) لتسمية النقاط التي إحداثياتها:
(٢ ، ٢)، (-٥ ، ٢)، (١ ، -٣).

٢ أعتمد الشكل (١-٩) لتحديد إحداثيي كل من النقاط: هـ ، و ، ط ، ك.

٣ أرسم في المستوى الديكارتي القطع المستقيمة، أب ، جـ د، هـ و، حيث:
أ (١ ، ٣)، ب (٣ ، ٣)، جـ (٢ ، ٢)
د (٢ ، ٥)، هـ (٣ ، -٤). و (٦ ، ٤).

٤ أُعيّن النقطتين: جـ (١ ، ٤)، د(٣ ، ٤) في المستوى الديكارتي، ثم أجد طول القطعة جـ د.

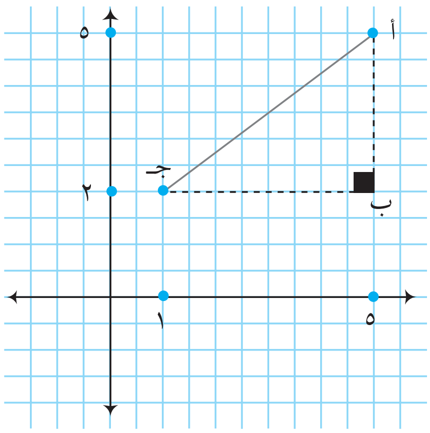
٥ أعتمد الشكل (١-٥) لتحديد إحداثيي النقطة جـ.

٦ إذا كانت جـ(٢ ، ٢)، ع(-٢ ، -٢)، ك(٢ ، -٢). أجد إحداثيي النقطة هـ، بحيث يكون الشكل جـ ك ع هـ مربّعاً.

٧ إذا كانت أ (٠ ، ٠)، ب (٣ ، ٠)، جـ (٤ ، ٦)، أجد إحداثيي النقطة د، بحيث يكون الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع.

# ١ - ٢ المسافة بين نقطتين في المستوى

تعلمت سابقاً أنه لإيجاد المسافة بين نقطتين، فإن باستطاعتك قياسها بالمسطرة، وفي هذا الدرس ستتعرف طرقاً أخرى لإيجاد المسافة بين نقطتين.




الشكل (١-٦)

## مثال (١)

في الشكل (١-٦)، جد أجـ (المسافة بين النقطتين أ، جـ)

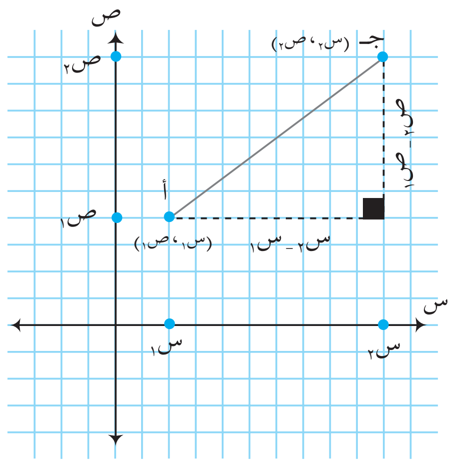
**الحـل:** من الرسم فإن ب جـ = ٤ وحدات، أب = ٣ وحدات، وباستخدام نظرية فيثاغورس فإن:

$(أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢$

$(أ جـ)^٢ = ٩ + ١٦$

$(أ جـ)^٢ = ٢٥$

أ جـ = ٥ وحدات




الشكل (١-٧)

لتكن أ $(س_١، ص_١)$، جـ$(س_٢، ص_٢)$ نقطتين في المستوى الديكارتي كما في الشكل (١-٧). لإيجاد المسافة بين النقطتين أ، جـ، أي طول القطعة المستقيمة أجـ، فإنه يمكن استخدام نظرية فيثاغورس كما سبق للتوصل إلى قانون يعطي المسافة بين النقطتين.

### قانون المسافة بين نقطتين

**إذا كانت أ $(س_١، ص_١)$، جـ $(س_٢، ص_٢)$، فإن المسافة بين النقطتين أ، جـ تعطى بالقانون:**

$$أ جـ = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

ففي مثال (١)، النقطة أ (٥، ٥)، والنقطة جـ (١، ٢)

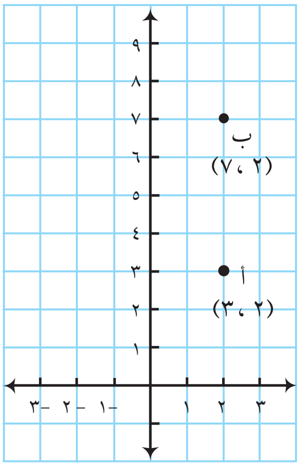
$أ جـ = \sqrt{(٥ - ١)^٢ + (٥ - ٢)^٢}$ أو $أ جـ = \sqrt{(١-٥)^٢ + (٢-٥)^٢}$

$أ جـ = \sqrt{١٦ + ٩}$

$أ جـ = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدات

## مثال (٢)

احسب المسافة بين النقطتين أ (٢ ، ٣)، ب (٢ ، ٧) .



الشكل (١–٨)

## الحل:

المسافة بين أ ، ب $= \sqrt{(٢ - ٢)^{٢} + (٧ - ٣)^{٢}}$

أ ب $= \sqrt{(٠)^{٢} + (٤)^{٢}}$

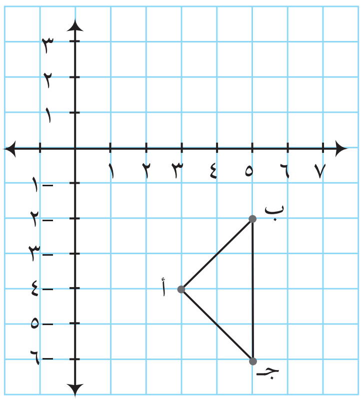
$= \sqrt{٠ + ١٦}$

$= \sqrt{١٦} = ٤$

لاحظ الشكل (١–٨) المجاور .

## مثال (٣)

بيّن أن المثلث الذي رؤوسه النقاط أ (٣ ، –٤)، ب (٥ ، –٢)، جـ (٥ ، –٦) متساوي الساقين .



الشكل (١–٩)

## الحل:

أ ب $= \sqrt{(٥ - ٣)^{٢} + (-٢ - (-٤))^{٢}}$

$= \sqrt{(٢)^{٢} + (٢)^{٢}}$

$= \sqrt{٤ + ٤}$

$= \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة

ب جـ $= \sqrt{(٥ - ٥)^{٢} + (-٦ - (-٢))^{٢}}$

$= \sqrt{٠ + (-٤)^{٢}}$

$= \sqrt{١٦} = ٤$ وحدات

أ جـ $= \sqrt{(٥ - ٣)^{٢} + (-٦ - (-٤))^{٢}}$

$= \sqrt{٤ + ٤}$

$= \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة

وبما أن أ ب = أ جـ فالمثلث أ ب جـ متساوي الساقين . كما في الشكل (١–٩)

## تدريبات صفّية

أحسب المسافة بين النقطتين المذكورتين في كل مما يلي :

أ) أ(٣ ، ٤)، ب (٦ ، ٨)

ب) ن (١ ، ١)، م(-١ ، -٣)

جـ) هـ(٣ ، ٤)، و (٠ ، ٠)

د) ك (٢ ، -٣)، ن (-٤ ، ٥)

## تمارين ومسائل

١) إذا كانت أ (-١ ، ٠)، ب (٠ ، ٣)، جـ (-٢ ، ٤)، أجد أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ .

٢) على المستوى الديكارتي :

أ ) أعيّن النقطتين أ (٢ ، -٢) ، ب (٢ ، ٢) .

ب) أبيّن أنّ المثلث أ ب م متساوي الساقين حيث م نقطة الأصل .

٣) أبيّن أن النقاط أ(-٢ ، -٢)، ب(٢ ، ١)، جـ(٦ ، ٤) على استقامة واحدة .

٤) أبيّن أن المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه النقاط أ(٢ ، -١)، ب (٢ ، ١)، جـ(-١ ، ١) قائم الزاوية، ثم أجد مساحته .

٥) لتكن أ (-٢ ، ٣)، ب (-١ ، ٤)، جـ(٢ ، -١)، د (١ ، -٢). أبيّن أنّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .

٦) إذا كانت أ (١ ، ٢)، ب (٣ ، ٠)، جـ(٥ ، ٢)، د (٣ ، ٤)

أ ) أعيّن النقاط أ ، ب ، جـ ، د في المستوى .

ب) أجد أطوال أضلاع الشكل الرباعي أ ب جـ د .

جـ) أجد أطوال الأقطار في الشكل .

د ) أبيّن أن الشكل أ ب جـ د مربع .

٧) لتكن أ (-٢ ، ٠)، ب (-٥ ، هـ) . أجد قيمة هـ بحيث أ ب = ٥ وحدات .

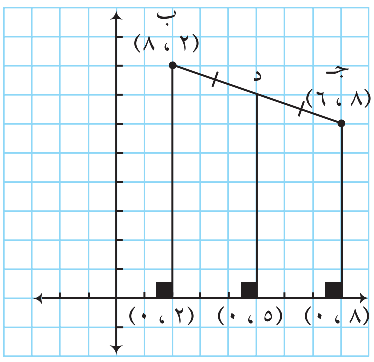
## ١ - ٣ إحداثيات النقطة التي تنصف قطعة مستقيمة

تعلمت في سنوات سابقة كيف تقسم قطعة مستقيمة إلى نصفين، وستتعلم في هذا الدرس إيجاد إحداثيات النقطة التي تنصف قطعة مستقيمة.

**مثال (١)** جد إحداثيات النقطة د إذا علمت أنها منتصف القطعة المستقيمة ب جـ حيث ب (٢ ، ٨)، جـ (٨ ، ٦).

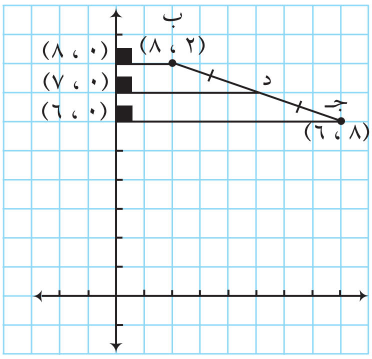
**الحل:**

(١) لإيجاد الإحداثي السيني للنقطة د ، ننزل عموداً من د على محور السينات، ونعيّن الإحداثي السيني لنقطة التقاطع الذي يساوي ٥ ، انظر المحور السيني في الشكل (١-١٠).



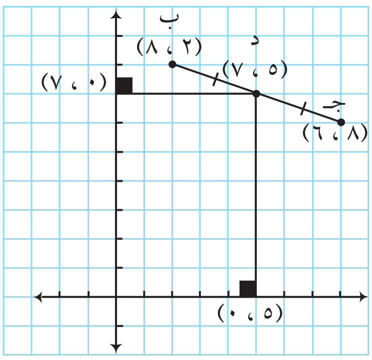
الشكل (١-١٠)

(٢) لإيجاد الإحداثي الصادي للنقطة د، ننزل عموداً من د على محور الصادات، ونعيّن الإحداثي الصادي لنقطة التقاطع الذي يساوي ٧، انظر المحور الصادي في الشكل (١-١١).



الشكل (١-١١)

(٣) إذن إحداثيا النقطة د هما (٥ ، ٧)، أنظر الشكل (١-١٢)



الشكل (١-١٢)

وباستخدام الرموز بدل الأعداد في المثال (١) أعلاه نستنتج أنّ :

### قاعدة:

**إذا نصّفت نقطة قطعة مستقيمة مثل أ ب ، أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) فإن إحداثيي هذه النقطة (س ، ص) هما :**

$$س = \frac{س_١ + س_٢}{٢} \quad ، \quad ص = \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$$

ففي المثال السابق الإحداثي السيني للنقطة د $= \frac{٨ + ٢}{٢} = ٥$

الإحداثي الصادي للنقطة د $= \frac{٦ + ٨}{٢} = ٧$

إحداثيا النقطة د هما (٥ ، ٧)

### مثال (٢)

جد إحداثيي النقطة ع إذا علمت أنها منتصف القطعة المستقيمة هـ و حيث هـ (٥ ، −٣)، و (−٢ ، ٧) .

### الحل:

الإحداثي السيني للنقطة ع $= \frac{٥ + (-٢)}{٢} = ١,٥$

الإحداثي الصادي للنقطة ع $= \frac{-٣ + ٧}{٢} = ٢$

إحداثيا النقطة ع هما (١,٥ ، ٢)

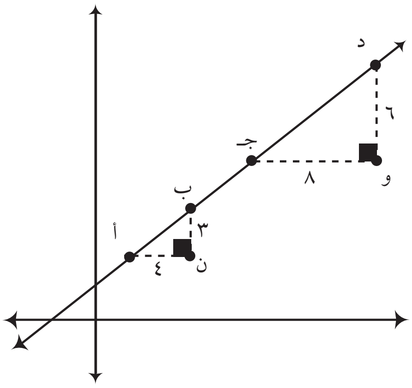
## تمارين ومسائل

١ أجد إحداثيي منتصف القطعة أب حيث أ (٢ ، −٤)، ب(−٣ ، −٦) .

٢ إذا كانت النقطة جـ(−٣ ، −٧) هي منتصف القطعة المستقيمة ع ك ، وكانت ع (٥ ، ٦)، أجد إحداثيي ك .

٣ أبيّن أنّ قطري الشكل الرباعي الذي رؤوسه أ(−١ ، −٢)، ب (١ ، ٣)، جـ(−٣ ، −٣)، د(−٥ ، −٨) ينصف أحدهما الآخر . ما اسم الشكل أ ب جـ د في هذه الحالة ؟

# ١ - ٤ ميـل الخط المستقيم




الشكل (١-١٣)

في الشكل المقابل (١-١٣)، إذا علمت أنّ:

طول ب ن = ٣ وحدات، طول د و = ٦ وحدات،

طول أ ن = ٤ وحدات، طول و جـ = ٨ وحدات.

أ ) احسب $\frac{\text{ب ن}}{\text{أ ن}}$ ، $\frac{\text{د و}}{\text{جـ و}}$

ب) قارن بين $\frac{\text{ب ن}}{\text{أ ن}}$ ، $\frac{\text{د و}}{\text{جـ و}}$

**الحـــل:** أ ) $\frac{\text{ب ن}}{\text{أ ن}} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{\text{د و}}{\text{جـ و}} = \frac{٦}{٨}$

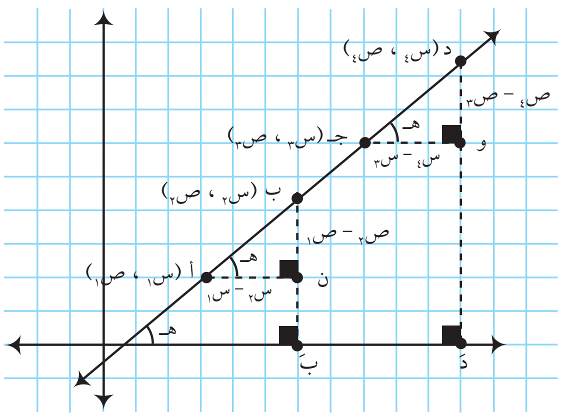
ب ) $\frac{\text{ب ن}}{\text{أ ن}} = \frac{\text{د و}}{\text{جـ و}}$ ، لاحظ أن النقاط أ ، ب ، جـ ، د تقع على مستقيم واحد، **وأن نسبة التغير في الإحداثيات الصادية إلى التغير في الإحداثيات السينية لأي نقطتين ثابتة، وتُسمّى هذه النسبة بالميل .**

يمثل الشكل (١-١٤) مستقيماً في المستوى الديكارتي، أخذت عليه النقاط أ ، ب ، جـ ، د .

ب بَ، د دَ عمودان مرسومان على محور السينات .

العمودان أن ، جـ و عمودان على ب بَ، د دَ على الترتيب .

المثلثان ب ن أ ، د و جـ متشابهان.




الشكل (١-١٤)

$\therefore \frac{\text{ب ن}}{\text{أ ن}} = \frac{\text{د و}}{\text{جـ و}}$

$\therefore \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{\text{ص}_{٤} - \text{ص}_{٣}}{\text{س}_{٤} - \text{س}_{٣}}$

**نتيجة:**

مما سبق نستنتج أنه لأي نقطتين من نقاط المستقيم ل مثل (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)، فإن نسبة التغير في الإحداثي الصادي إلى التغير في الإحداثي السيني تبقى ثابتة وتساوي $\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$ .

**وهذه النسبة تعرف بميل المستقيم ويرمز للميل بالرمز م وتُعرف الزاوية الموجبة (هـ) التي يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات بزاوية الميل (لاحظ أنّ م = ظا هـ)، وبذلك نستطيع صياغة التعريف الآتي :**

## ميل الخط المستقيم:

إذا كانت أ $(س_١ ، ص_١)$، ب $(س_٢ ، ص_٢)$، فإن ميل الخط المستقيم أب هو :

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} ، \text{ حيث } س_١ \neq س_٢$$

نلاحظ أن ميل الخط المستقيم لا يعتمد على طريقة اختيار النقطتين عليه .

في حالة $ص_١ = ص_٢$ ، يكون هذا المستقيم عموداً على محور الصادات (موازياً لمحور السينات)، وميله = صفر .

وفي حالة $س_١ = س_٢$، يكون هذا المستقيم عموداً على محور السينات (موازياً لمحور الصادات)، وميله غير معرف (أي ليس له ميل) .

### مثال (١)

جد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين أ(١ ، ٣)، ب (٢ ، ٥) .

**الحـــل:** ميل المستقيم أب $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$$= \frac{٥ - ٣}{٢ - ١} = ٢$$

### مثال (٢)

جد ميل القطعة المستقيمة أب ، إذا كانت أ (−١ ، ٠)، ب (٢ ، −٦) .

**الحـــل:** ميل القطعة أب $= \frac{-٦ - ٠}{٢ - (-١)}$

$$= \frac{-٦}{٣} = -٢$$

### مثال (٣)

ما ميل المستقيم الذي يصنع زاوية $٦٠^\circ$ مع محور السينات الموجب ؟

**الحـــل:** الميل (م) = ظا الزاوية التي يصنعها المستقيم مع محور السينات الموجب .

أي أنّ م = ظا هـ = ظا $٦٠^\circ$ = $\sqrt{٣}$

## تدريبات صفّية

أجد ميل الخط المستقيم أب في كل حالة مما يأتي :

١ أ (٤ ، ٥) ، ب (٧ ، ٥).

٢ أ (٢ ، −٥)، ب (٢ ، ٤).

٣ أ (−٤ ، ٢) ، ب (−١ ، ٨).

٤ أ (−٦ ، ٠)، ب (٠ ، −١).

٥ أ ($\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$)، ب ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$).

٦ زاوية ميله = ٤٥°.

## تمارين ومسائل

١ أرسم في المستوى الديكارتي القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين أ (٥ ، ٠)، ب (٠ ، ٤)، ثم أجد ميلها.

٢ أجد ميل المستقيم المار بنقطة الأصل، والنقطة ع في الحالات الآتية :

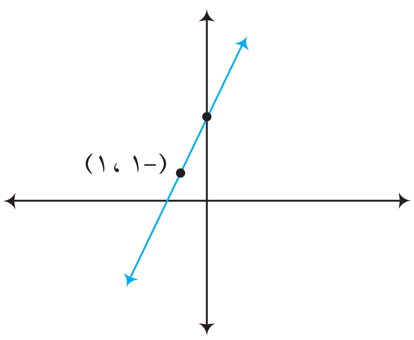
- ع (٢ ، ٥)
- ع (٦ ، ٠)

٣ إذا كانت أ (٢ ، −٤)، ب (٧ ، ل) وكان ميل القطعة أ ب = ٢ . فما قيمة ل ؟

٤ إذا كانت أ (٣ ، ٥)، أجد الإحداثي الصادي للنقطة ب، إذا علمت أن إحداثيها السيني هو ٢، وميل أ ب يساوي ١ .

٥ خط مستقيم يمر بالنقطة (−١ ، ١)، وميله ٢، كما في الشكل (١−١٥).

أجد إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور الصادات.



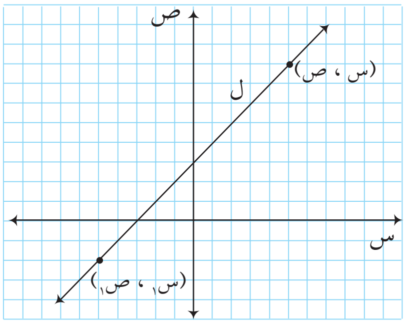
الشكل (١−١٥)

٦ ما ميل المستقيم الذي يصنع زاوية حادة هـ مع محور السينات الموجب حيث جا هـ = $\frac{٣}{٥}$

# ١ - ٥ معادلة الخط المستقيم

العلاقة الجبرية التي تربط بين إحداثيي أي نقطة تقع على مستقيم ما ، هي معادلة ذلك المستقيم .
وهناك أكثر من صورة لمعادلة الخط المستقيم ، ستتعرف في هذا البند على هذه الصور :

## أ صورة الميــل ونقطة:



الشكل (١-١٦)

ليكن ل مستقيماً ميله م، ويمر بنقطة معلومة مثل ($س_١$ ، $ص_١$)،
كما في الشكل (١ - ١٦).

لإيجاد معادلة المستقيم ل، نفرض أي نقطة عليه مثل (س ، ص)

فيكون $م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

وعليه ، فإن : $\boxed{ص - ص_١ = م\,(س - س_١)}$

**تسمى هذه المعادلة بمعادلة الخط المستقيم الذي ميله م ويمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) .**

**مثـــال** جد معادلة الخط المستقيم الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة (-١ ، ٣) .

**الحـــل:** معادلة المستقيم هي : $ص - ص_١ = م\,(س - س_١)$

معادلة المستقيم المطلوبة : ص - ٣ = ٢ (س - (-١))

ص - ٣ = ٢ (س + ١)

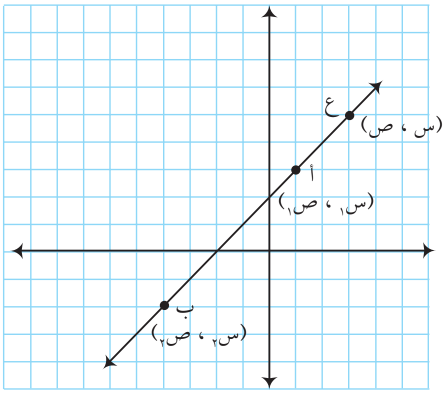
∴ ص = ٢س + ٥

## تدريـــــب

أجد معادلة المستقيم الذي ميله ٢ ، ويمر بالنقطة (٢ ، ٤) .

## ب صورة النقطتين:

يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم، إذا علمت إحداثيات نقطتين يمر بهما مثل: أ $(س_1 ، ص_1)$، ب $(س_2 ، ص_2)$، كما هو في الشكل (١-١٧) المجاور، وذلك كما يلي:




الشكل (١-١٧)

أولاً: نأخذ نقطة عامّة ع (س ، ص) على الخط

ثانياً: نجد ميل أ ب $= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

ثالثاً: نجد ميل ع أ $= \frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ ، وبما أنّ ميل أ ب يساوي ميل ع أ لأنّ أ ، ب ، ع تقع على نفس الخط المستقيم.

إذن $\boxed{\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}}$ وهي الصورة المطلوبة

### مثال

جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ (٥ ، ٤)، ب (٦ ، ٨)

### الحل:

المعادلة هي على الصورة: $\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

$$\frac{ص - ٤}{س - ٥} = \frac{٨ - ٤}{٦ - ٥}$$

$$\frac{ص - ٤}{س - ٥} = ٤ \Leftarrow (ص - ٤) = ٤(س - ٥) \Leftarrow ص - ٤ = ٤س - ٢٠$$

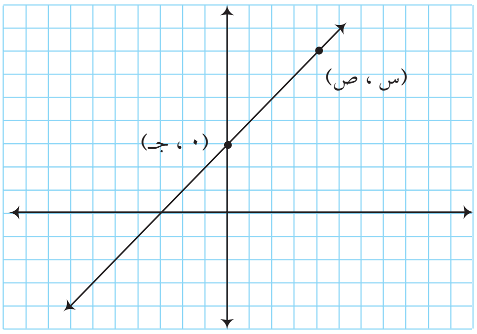
$$\Leftarrow ص = ٤س - ١٦$$

### تدريب

أجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٧ ، ١)، (-٢ ، ٣).

## جـ صورة الميل والمقطع الصادي:

إذا قطع المستقيم جزءاً من محور الصادات يساوي جـ، وكان ميله م ، لاحظ الشكل (١-١٨) المجاور، فإن :



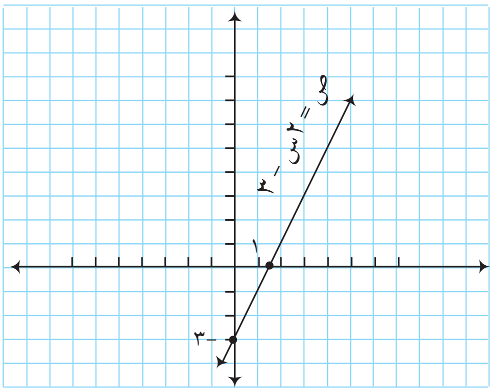
الشكل (١-١٨)

$$م = \frac{ص - جـ}{س - ٠} \Leftarrow ص - جـ = م\,س \Leftarrow \boxed{ص = م\,س + جـ}$$

وتسمّى هذه الصورة لمعادلة الخط المستقيم صورة الميل والمقطع الصادي

### مثال (١)

جد معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي ٢ ، ويقطع ثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور الصادات .



الشكل (١-١٩)

### الحل:

ص = م س + جـ

ص = ٢س - ٣ انظر الشكل (١-١٩) المجاور

### مثال (٢)

جد معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي -٤ ، ويقطع ثلاث وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات ، (المقطع السيني للمستقيم = ٣) .

### الحل:

لاحظ أنّ الصورة ص = م س + جـ (صورة الميل والمقطع الصادي لا تنطبق على هذه الحالة) ولذا نلجأ لتطبيق صورة الميل والنقطة وهي $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

نعوض م = -٤ ، $(س_١ ، ص_١) = (٣ ، ٠)$ في المعادلة فتصبح ص - ٠ = -٤(س - ٣)

$\Leftarrow$ ص = -٤س + ١٢

## تدريبات صفّية

١ أجد معادلة المستقيم الذي ميله ٨ ويقطع ٩ وحدات من الاتجاه الموجب لمحور الصادات .

٢ أجد معادلة المستقيم الذي ميله -٢ ، ويمر بالنقطة (١ ، ٠).

٣ أجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (٢ ، -٣).

٤ أجد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{-٣}{٢}$ ومقطعه الصادي ٤ .

## تمارين ومسائل

١ أجد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ ومقطعه السيني (−٢) .

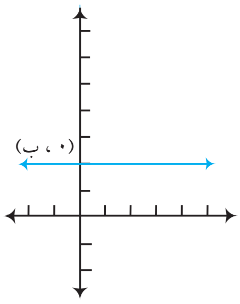
٢ أجد معادلة المستقيم المتوسط للمثلث الذي رؤوسه النقاط أ(−٤ ، −٢)، ب(−١ ، ٥)، جـ(١٠ ، −٤)، والمرسوم من نقطة أ .

٣ أجد معادلات أضلاع المثلث الذي رؤوسه أ(٢ ، ٥)، ب(٧ ، ٨)، جـ(٤ ، ١٠)، وأبرهن أنّ جـ أ يمر بنقطة الأصل .

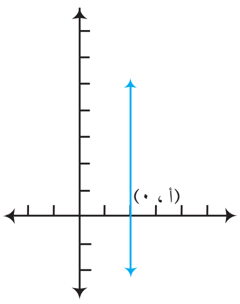
### د صورة المقطعين:

إذا كان الخط المستقيم يوازي محور السينات فإنّ الاحداثي الصادي لأي نقطة واقعة عليه لايتغير وبالتالي فإنّ معادلته : ص = ب ، انظر الشكل (١−٢٠) أدناه .

إذا كان الخط المستقيم يوازي محور الصادات فإنّ الاحداثي السيني لأي نقطة واقعة عليه لايتغير وبالتالي فإنّ معادلته : س = أ ، انظر الشكل (١−٢١) أدناه .



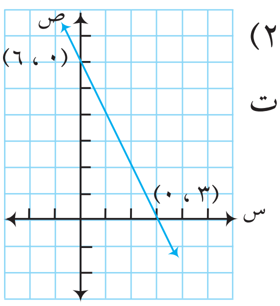
الشكل (١ −٢٠)



الشكل (١ −٢١)

ولإيجاد معادلة المستقيم بدلالة مقطعيه من المحورين الإحداثيين ، انظر الشكل (١−٢٢) حيث الخط المستقيم يقطع محور السينات عند النقطة (٣ ، ٠) ، ويقطع محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٦) ، نستخدم صورة النقطتين :

$$\frac{\text{ص} - \text{ص}_{١}}{\text{س} - \text{س}_{١}} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$



الشكل (١− ٢٢)

∴ معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٠)، (٠ ، ٦) هي : $\frac{ص - ٠}{س - ٣} = \frac{٦ - ٠}{٠ - ٣}$

∴ $\frac{ص - ٠}{س - ٣} = -٢ \Leftarrow ص = -٢س + ٦ \Leftarrow ٢س + ص = ٦ \Leftarrow \frac{س}{٣} + \frac{ص}{٦} = ١$ (بقسمة الطرفين على ٦)

أي $\frac{س}{\text{المقطع السيني}} + \frac{ص}{\text{المقطع الصادي}} = ١$ وتسمى هذه الصورة لمعادلة الخط المستقيم صورة المقطعين .

وبشكل عام $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ (حيث أ المقطع من محور السينات ، ب المقطع من محور الصادات)

## مثال (١)

جد معادلة المستقيم الذي مقطعه السيني ٢ ، ومقطعه الصادي ٣ .

**الحل:** معادلة المستقيم بدلالة المقطعين هي : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

∴ المعادلة هي : $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ ، وبضرب الطرفين في (٦) ينتج :

$٣س + ٢ص = ٦$

## مثال (٢)

جد المقطعين السيني والصادي للمستقيم الذي معادلته : $٢س - ٥ص = ١٠$

**الحل:** نضع المعادلة على الصورة $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ ، وذلك بقسمة الطرفين على ١٠ فنجد أن :

$\frac{٢س}{١٠} - \frac{٥ص}{١٠} = \frac{١٠}{١٠} \Leftarrow \frac{س}{٥} - \frac{ص}{٢} = ١$

∴ المقطع السيني = ٥ ، والمقطع الصادي = −٢

## تدريبات صفّية

١ أجد معادلة المستقيم الذي مقطعه السيني = ٢ ، ومقطعه الصادي = −٤

٢ أجد المقطعين السيني والصادي للمستقيم الذي معادلته $٢س + ٥ص = ٦$

٣ أجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محور السينات ٧ وحدات ومن محور الصادات ٥ وحدات في الاتجاه السالب .

## هـ الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم:

يمكن التعبير عن جميع الصور السابقة لمعادلة الخط المستقيم بالصورة :

**أس + ب ص + جـ = صفراً، حيث أ ، ب لا يساويان صفراً في آن واحد .**
**علماً بأن أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية .**

وتعتبر هذه المعادلة الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم .

**مثال (١)** جد ميل المستقيم الذي معادلته ٧ص − ١٤س + ٩ = صفراً

**الحــل:** نعيد كتابة المعادلة لتصبح على الصورة ص = م س + جـ

٧ص − ١٤س + ٩ = صفر ⇐ ٧ص = ١٤ س − ٩

⇐ ص = ٢ س + $\frac{-٩}{٧}$ (بقسمة الطرفين على ٧ )

∴ ميل المستقيم م = ٢

(لاحظ أن ميل الخط المستقيم ٧ص − ١٤س + ٩ = صفر = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

وبشكل عام ميل المستقيم أس + ب ص + جـ = صفر هو $\frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

**مثال (٢)** جد طول مقطعي المستقيم الذي معادلته ٢س + ٣ص = ٦ من محوري الإحداثيات .

**الحــل:** لإيجاد طول المقطع السيني ، نضع ص = ٠ ، في المعادلة : ٢س + ٣ص = ٦

∴ ٢س = ٦

س = ٣

كذلك لإيجاد طول المقطع الصادي ، نضع س = صفر في المعادلة : ٢س + ٣ص = ٦

٣ص = ٦

ص = ٢

∴ طول المقطع السيني = ٣ وحدات .

طول المقطع الصادي = وحدتان .

## تدريبات صفّية

١ أجد ميل المستقيم الذي معادلته ٢س − ٤ص − ٦ = صفر .

٢ أجد ميل المستقيم الذي معادلته ٢ص − ٣ = صفر .

٣ أبيّن أي النقط الآتية تقع على المستقيم الذي معادلته س + ٢ص = ٣

أ(٢ ، −٣)، ب(٥ ، −١)، جـ(١ ، ١)، د(٠ ، ٣) .

## تمارين ومسائل

١ أجد الميل والمقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته :

أ ص = س − ٦ ب ٣س − ٤ص + ٥ = ٠

٢ أجد طولي المقطعين من المحورين للمستقيم ٢س − ٤ص − ٨ = صفراً .

٣ أجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين أ(٣ ، −٢)، ب(٠ ، ٣)، ثم أكتب هذه المعادلة بدلالة المقطعين من المحورين الإحداثيين ، ثم أكتب المعادلة على الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم .

٤ أجد قيمة أ التي تجعل المستقيم ص = (أ + ١) س + ٢ أفقياً .

## ١-٦ التمثيل البياني للمعادلة الخطية

تعلمت في سنوات سابقة أن حل المعادلة الخطية في متغير واحد، يعني إيجاد قيمة المتغير التي تحقق صحّة المعادلة ، أي تجعل الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر .

أما في حالة المعادلة الخطية في متغيرين، فإن حلها عدد لا نهائي من الأزواج المرتبة على شكل (س، ص)، وتقع على خط مستقيم عند تمثيلها بيانياً، وتمثل مجموعة جميع النقاط الواقعة على الخط مجموعة الحل لهذه المعادلة .

**مثال (١):** مثّل بيانياً مجموعة الحل للمعادلة س + ص − ٢ = صفر

**الحــل:**

١) نجعل ص موضوع القانون (نكتب ص بدلالة س) في المعادلة فتصبح المعادلة
ص = − س + ٢

٢) نختار ثلاث قيم للمتغير س، ونحسب قيم ص المناظرة لها، وسنأخذ في هذا المثال القيــم صفر ، ١ ، −١ للمتغير س .

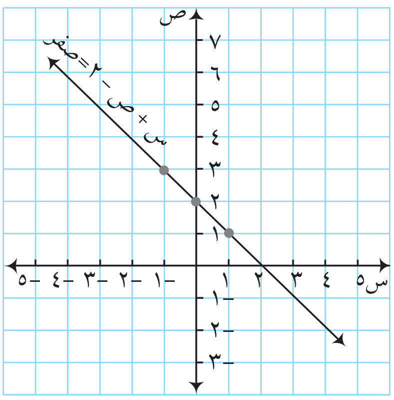
٣) نكوّن جدولاً بقيم س، ص المناظرة كما هو أدناه .

| س | صفر | ١ | −١ |
|---|---|---|---|
| ص | ٢ | ١ | ٣ |

٤) نعيّن النقاط (٠ ، ٢) ، (١ ، ١) ، (−١ ، ٣) على المستوى الديكارتي .
(لاحظ أنها تقع على خط مستقيم واحد) .

٥) نصل بين النقاط بخط مستقيم .

نلاحظ أن الخط الناتج له خاصية هامة جداً، وهي أن كل نقطة على هذا الخط تحقق المعادلة الخطية، وكل حل على شكل زوج مرتب (س ، ص) يجب أن يقع على هذا الخط . انظر الشكل (١−٢٣)




الشكل (١−٢٣)

## مثال (٢): أمثّل بيانياً مجموعة الحل للمعادلة ٣س − ص = ٥

**الحــل:** نعيد كتابة المعادلة : ٣س − ص = ٥ على الصورة

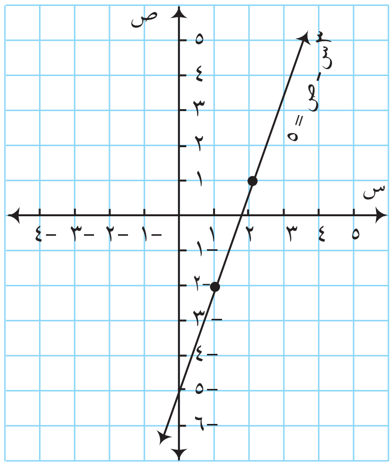
ص = م + جـ فتصبح ص = ٣س − ٥

ولتمثيل مجموعة الحل للمعادلة ٣س − ص = ٥ بيانياً

نكوّن جدولاً بقيم س ، ص المناظرة كما هو في الجدول

أدناه، ونرسم الخط المستقيم كما في الشكل (١−٢٤):

| س | صفر | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| ص | −٥ | −٢ | ١ |



الشكل (١−٢٤)

## مثال(٣): استخدم طريقة المقاطع في التمثيل البياني للمعادلة الخطية ٣ ص + ٢ س = ٦

**الحــل:**

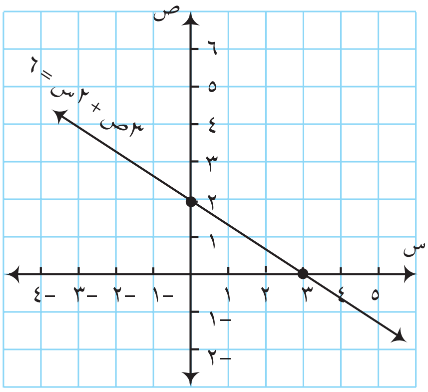
١) نعوّض عن قيمة س بصفر،

ونجد قيمة ص المناظرة .

٢) نعوّض عن قيمة ص بصفر،

ونجد قيمة س المناظرة .

| س | صفر | ٣ |
|---|---|---|
| ص | ٢ | صفر |



الشكل (١−٢٥)

نعيّن نقطتي التقاطع من الجدول أعلاه ونصل بينها بخط مستقيم كما هو في الشكل (١−٢٥) أعلاه .

## مثال(٤): استخدم طريقة المقاطع في التمثيل البياني للمعادلة الخطية . ٥ + ٤ ص = ٢ س

**الحــل:**

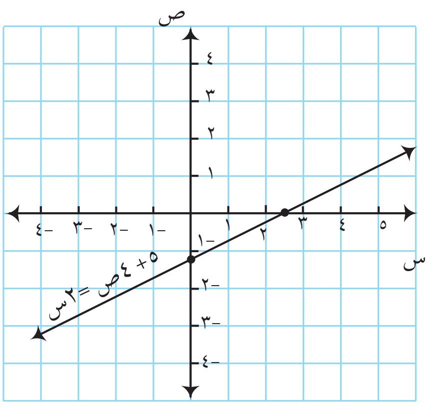
١) نعوّض عن قيمة ص بصفر،

فتكون $س = \frac{٥}{٢}$

٢) نعوّض عن قيمة س بصفر،

فتكون $ص = \frac{-٥}{٤}$

| س | $\frac{٥}{٢}$ | صفر |
|---|---|---|
| ص | صفر | $\frac{-٥}{٤}$ |



الشكل (١−٢٦)

**مثال(٥):** إذا كان ثلاثة أمثال العدد س مطروحا منه ضعفا العدد ص يساوي ٦ ، اكتب معادلة خطية بدلالة س وص ثم مثّل مجموعة حلها بيانياً .

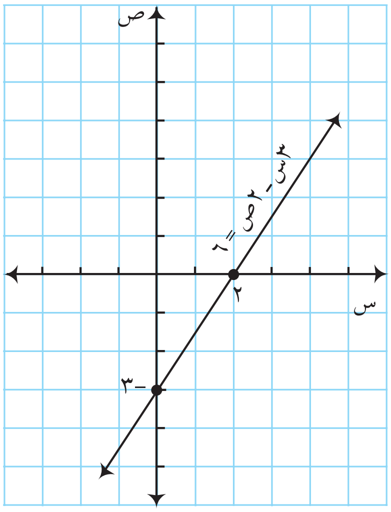
**الحل:** ثلاثة أمثال العدد س تساوي ٣س .

ضعفا العدد ص يساوي ٢ص .

(ثلاثة أمثال س- ضعفي ص= ٦) تصبح ٣س -٢ص=٦

وللتمثيل البياني نعوض عن قيمة س بصفر مرّة، ومرّة نعوض عن قيمة ص بصفر . ونرسم الخط المستقيم كما هو في الشكل (١-٢٧)

| س | صفر | ٢ |
|---|---|---|
| ص | -٣ | صفر |



الشكل (١-٢٧)

**مثال(٦)** هل تقع النقطة (١ ، -٢) على المستقيم الذي معادلته ٥س + ص = ٣ ؟

**الحل:** نعوض بدل س بالقيمة ١ ، ونعوض بدل ص بالقيمة -٢ في الطرف الأيمن .

٥×١ + -٢ $\overset{?}{=}$ ٣

الطرف الأيمن = ٣

الطرف الأيسر = ٣

بما أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

∴ النقطة (١ ، -٢) تقع على الخط المستقيم ٥س + ص = ٣

**مثال (٧)** إذا كانت النقطة (أ ، ٢أ) تقع على الخط المستقيم الذي معادلته :

٧ ص - ٦س = ٨ ، احسب قيمة أ

**الحل:** بما أن النقطة (أ ، ٢أ) تقع على الخط المستقيم ٧ ص - ٦س = ٨

فهي تنتمي إلى مجموعة حل المعادلة

∴ س = أ و ص = ٢أ تحققان المعادلة

بتعويض هذه القيم في المعادلة نجد أن ٧ × ٢أ - ٦أ = ٨

∴ ١٤أ - ٦أ = ٨ ⇐ ٨أ = ٨ ⇐ أ = ١

## تدريبات صفّية

١ أمثل بيانياً مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

أ) س + ص = ٦

ب) س − ص + ٤ = صفر

جـ) ص = ٢س −١

د) ٣س + ٢ص = ١٢

هـ) س = ٣

و) ص = -٢

٢ إذا كان العدد ص يزيد عن العدد س بمقدار ٢ ، أكتب معادلة خطية تعبر عن العلاقة بين هذين العددين ، ثم أمثلها بيانياً .

## تمارين ومسائل

١ أي الأزواج المرتبة الاتية تنتمي إلى مجموعة حل المعادلة $\frac{\text{س}}{٤}$ − ص = ١

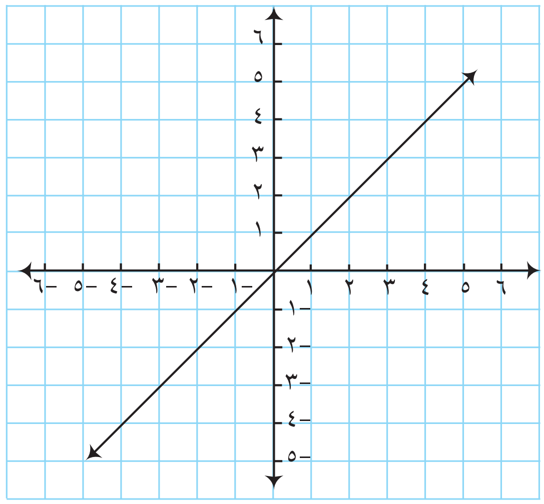
(٠ ، ١) ، (٠ ، −١) ، (٤ ، ٠) ، (−٤ ، ٠) ، (٨ ، ١)

٢ إذا كانت النقطة أ (ع ، −ع) تقع على الخط المستقيم الذي معادلته : ص = س + ٢ . أحسب قيمة ع .

٣ إذا كانت النقطة (١ ، −٢) تنتمي إلى مجموعة حل المعادلة الخطية أس + ٢ص − ٧ = صفر . أحسب قيمة أ .

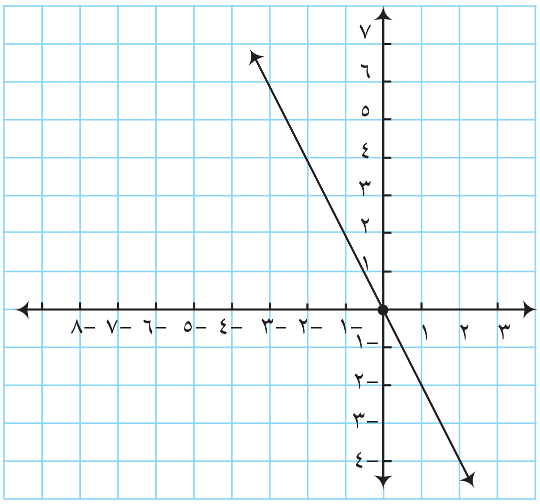
٤ ألاحظ التمثيل البياني في الشكلين (١−٢٨)، (١−٢٩)، وأكتب المعادلة التي يدلّ عليها كل تمثيل .

أ



الشكل (١−٢٨)

ب



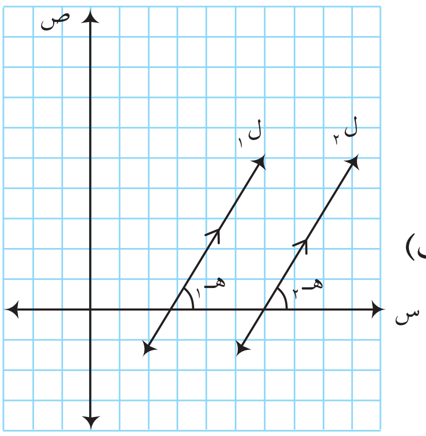
الشكل (١−٢٩)

# ١ - ٧ التوازي والتعامد

ستتعرف في هذا البند على العلاقة بين الميل، والتوازي والتعامد للمستقيمات.

## أولا - التــوازي:

في الشكل (١ - ٣٠) نلاحظ أنّ المستقيم $ل_١$ يوازي المستقيم $ل_٢$ أو ($ل_١ // ل_٢$).



الشكل (١ - ٣٠)

أي أن: قياس $\measuredangle$ $هـ_١$ = قياس $\measuredangle$ $هـ_٢$ (بالتناظر)

$\therefore$ ظا$هـ_١$ = ظا$هـ_٢$

$\therefore$ $م_١$ = $م_٢$

(لأنّ ميل المستقيم هو ظل الزاوية التي يصنعها مع محور السينات الموجب)

نستنتج أنه: **إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما متساويان، والعكس صحيح**

## مثال (١)

بيّن أن المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٨)، (٤ ، ٩) يوازي المستقيم المار بالنقطتين (١١ ، ١٤)، (١٢ ، ١٥).

## الحــل:

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

ميل المستقيم الأول = $\frac{٩ - ٨}{٤ - ٣} = ١$ ، ميل المستقيم الثاني = $\frac{١٥ - ١٤}{١٢ - ١١} = ١$

$\therefore$ ميل المستقيم الأول = ميل المستقيم الثاني.

$\therefore$ المستقيمان متوازيان.

## مثال (٢)

بيّن أن النقاط أ(٣ ، ٢)، ب(١ ، ١)، جـ(−١ ، ٠) تقع على استقامة واحدة:

## الحل:

$$\text{ميل أب} = \frac{٢ - ١}{٣ - ١} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ميل ب جـ} = \frac{٠ - ١}{(-١) - ١} = \frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$$

∴ ميل أب = ميل ب جـ

∴ أ ب // ب جـ ، وبما أن النقطة ب مشتركة، إذن لا بد أن يكون المستقيمان أب ، ب جـ على استقامة واحدة، أي أنّ النقاط الثلاث تقع على استقامة واحدة.

## مثال (٣)

بيّن باستخدام الميل أنّ الشكل الرباعي الذي رؤوسه أ(−٣ ، −١)، ب(١ ، −٤)، جـ(١٠ ، −٥)، د(٦ ، −٢) هو متوازي أضلاع.

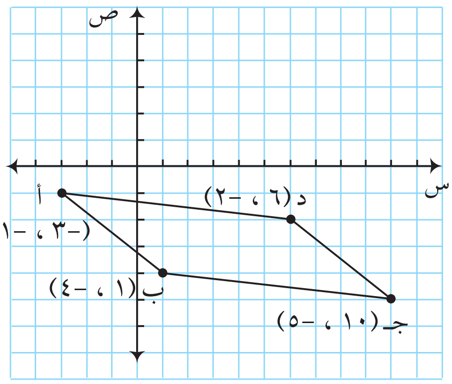
## الحل:

$$\text{ميل أب} = \frac{-٤ - (-١)}{١ - (-٣)} = \frac{-٣}{٤}$$

$$\text{ميل د جـ} = \frac{-٥ - (-٢)}{١٠ - ٦} = \frac{-٣}{٤}$$

$$\text{ميل ب جـ} = \frac{-٥ - (-٤)}{١٠ - ١} = \frac{-١}{٩}$$

$$\text{ميل أد} = \frac{-٢ - (-١)}{٦ - (-٣)} = \frac{-١}{٩}$$



الشكل (١−٣١)

وبما أن ميل أب = ميل د جـ ∴ أب // د جـ ،

وكذلك ميل ب جـ = ميل أ د ∴ ب جـ // أد

في الشكل أ ب جـ د كل ضلعين متقابلين متوازيين

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع.

## ثانياً - التعامد:

في الشكل (١ – ٣٢) المستقيمان ل$_١$ ، ل$_٢$ متعامدان وميلاهما م$_١$ ، م$_٢$ على الترتيب، ونقطة تقاطعهما (١ ، ٠).

ولإيجاد ميل المستقيم ل$_١$ ، نأخذ عليه أي نقطتين مثل (١ ، ٠)، (–١ ، –١).

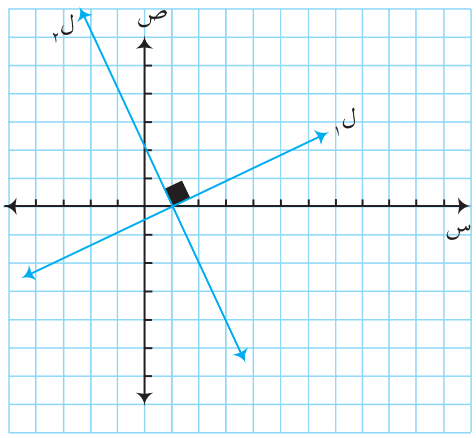
فيكون $م_١ = \frac{-١ - ٠}{-١ - ١} = \frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

وبالمثل، لإيجاد ميل المستقيم ل$_٢$ نأخذ نقطتين عليه مثل :

(١ ، ٠)، (٠ ، ٢) ، فيكون $م_٢ = \frac{٢ - ٠}{٠ - ١} = -٢$

لاحظ أن $م_١ \times م_٢ = \frac{١}{٢} \times -٢ = -١$

وهذه علاقة صحيحة لأي مستقيمين متعامدين ميلاهما معرّفان




الشكل (١–٣٢)

> **يتعامد مستقيمان ميلاهما م$_١$ ، م$_٢$ إذا كان حاصل ضرب ميليهما (م$_١$ x م$_٢$) يساوي –١ ، والعكس صحيح .**

### مثــال (٤)

إذا كانت أ(٢ ، ٤)، ب(–١ ، ٢)، جـ(–١ ، ٥)، د(١ ، ٢) بيّن أن المستقيمين أب، جـ د متعامدان .

### الحــل:

ميل أب $= \frac{٢ - ٤}{-١ - ٢} = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

ميل جـ د $= \frac{٢ - ٥}{١ - (-١)} = \frac{-٣}{٢}$

وبما أن $\frac{٢}{٣} \times \frac{-٣}{٢} = -١$ أي أنّ ميل أب x ميل جـ د = –١

∴ أب عمودي على جـ د، وتُكتب أب ⊥ جـ د

## تدريبات صفّية

١ أبيّن ما إذا كانت أب // جـ د ، أَمْ أَنَّ أب ⊥ جـ د في كل مما يأتي :

❋ أ(١ ، ٤)، ب(٦، ٦)، جـ(٢ ، –١)، د(١٢ ، ٣) .

❋❋ أ(–١ ، –١)، ب(٠ ، ٤)، جـ(–٤ ، ٣)، د(٦ ، ١) .

٢ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ(٣ ، ١)، ب(٨ ، ٥) والمستقيم المار بالنقطتين جـ(٢ ، ١٢)، د (٦ ، ٧) متعامدان .

## تمارين ومسائل

١ أجد ميل المستقيم الذي يعامد المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٥)، (٢ ، ٧) .

٢ أُثبت أن أ(٣ ، –٢)، ب(٠ ، ١)، جـ(–٦ ، –٥) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية، ثم أجد مساحة هذا المثلث .

٣ إذا كانت أ(٣ ، ٢)، ب(٥ ، ص)، جـ(٢ ، –١)، د(٣ ، –٢) فأوجد قيمة ص في كل من الحالتين :

أ المستقيم أب // المستقيم جـ د .

ب المستقيم أب ⊥ المستقيم جـ د .

٤ أجد معادلة المستقيم في كل من الحالات الآتية :

أ يمر بالنقطة (٢ ، –١) ويوازي المستقيم ٣س + ٢ص = ١٠

ب يمر بالنقطة (١ ، ٠)، وعمودي على المستقيم المار بالنقطتين أ(٥ ، ٤)، ب(٣ ، ٨) .

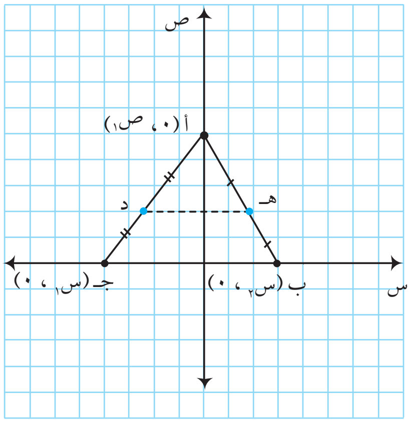
٥ أجد معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة أ ب ، حيث أ (٢ ، ٣)، ب (–٢ ، ٥) .

# ١-٨ تطبيــــقات

سبق لك وأن درست براهين نظريات في الهندسة المستوية بطرق هندسيّة وستتعرّف بهذا البند على براهين هذه النظريات باستخدام الهندسة التحليلية وبطريقة أسهل

## نظريــة (١)

**القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طوله .**



الشكل (١-٣٣)

المعطيات : أ ب جـ مثلث ، هـ ، د نقطتا منتصف كل من $\overline{أب}$، $\overline{أجـ}$ على التوالي .

المطلوب : اثبات أنّ $\overline{هـ د}$ توازي $\overline{ب جـ}$، وطولها يساوي نصف طوله

البرهـان : نختار الضلع $\overline{ب جـ}$ يقع على محور السينات ، ويقع الرأس أ على محور الصادات ، كما في الشكل (١ - ٣٣) ، ولتكن هـ منتصف $\overline{أب}$، د منتصف $\overline{أ جـ}$.

$$\therefore د\left(\frac{س_1 + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ص_1}{٢}\right) ، هـ\left(\frac{س_2 + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ص_1}{٢}\right)$$

$$\therefore د\left(\frac{س_1}{٢} ، \frac{ص_1}{٢}\right) ، هـ\left(\frac{س_2}{٢} ، \frac{ص_1}{٢}\right)$$

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{د هـ} = \frac{\frac{ص_1}{٢} - \frac{ص_1}{٢}}{\frac{س_2}{٢} - \frac{س_1}{٢}} = \text{صفر} \quad ، \quad \text{ميل } \overleftrightarrow{ب جـ} = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{ميل } \overleftrightarrow{د هـ} = \text{ميل } \overleftrightarrow{ب جـ} \Leftarrow \overleftrightarrow{دهـ} \,//\, \overleftrightarrow{ب جـ}$$

$$ب جـ = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (٠ - ٠)^2} = س_2 - س_1$$

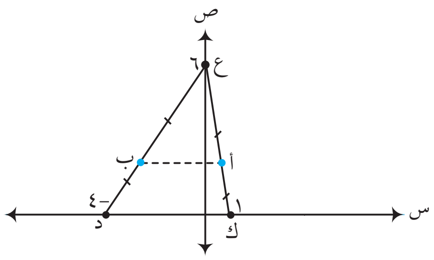
$$د هـ = \sqrt{\left(\frac{س_2}{٢} - \frac{س_1}{٢}\right)^2 + \left(\frac{ص_1}{٢} - \frac{ص_1}{٢}\right)^2}$$

$$د هـ = \sqrt{\left(\frac{س_2 - س_1}{٢}\right)^2} = \frac{١}{٢}(س_2 - س_1) = \frac{١}{٢} ب جـ .$$

وهو المطلوب $\square$

## مثال (١)

في الشكل (١-٣٣) جد طول أ ب .



الشكل (١-٣٣)

**الحل:** من الشكل المقابل أ تنصف ك ع ،

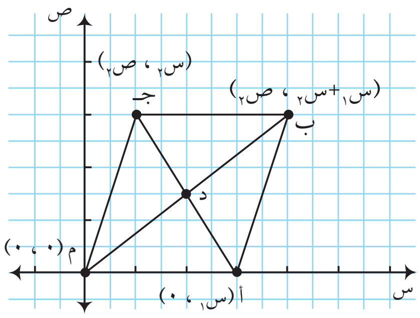
ب تنصف د ع ،

$\therefore$ أ ب = $\frac{١}{٢}$ ك د، ومن الرسم ك د = ٥

$\therefore$ أ ب = ٢,٥ وحدة

## نظرية (٢)

**قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر .**



الشكل (١-٣٤)

المعطيات : أ ب جـ م متوازي أضلاع، تقاطع قطراه أ جـ ، ب م في النقطة د .

المطلوب : إثبات أن النقطة د هي منتصف كل من أ جـ ، ب م .

البرهـان : يمكننا اختيار نظام الإحداثيات في المستوى، بحيث ينطبق أحد أضلاع متوازي الأضلاع على محور السينات، ويقع أحد الرؤوس وليكن م، على نقطة الأصل كما في الشكل (١ – ٣٤)، وذلك فقط لتسهيل الحسابات .

نلاحظ أن الإحداثي السيني للنقطة ب هو :

$س_٢$ + جـ ب = $س_٢$ + م أ = $س_٢$ + $س_١$ وإحداثيها الصادي هو $ص_٢$ .

$\therefore$ إحداثيا نقطة منتصف القطر م ب هما $\left(\frac{س_١ + س_٢ + صفر}{٢} ، \frac{ص_٢ + صفر}{٢}\right)$

$= \left(\frac{س_١+س_٢}{٢} ، \frac{ص_٢}{٢}\right)$

منتصف القطر أ جـ $= \left(\frac{س_١+س_٢}{٢} ، \frac{ص_٢}{٢}\right)$

$\therefore$ منتصف ب م هي نفسها منتصف القطر أجـ ، وهي النقطة د نفسها،

$\therefore$ د منتصف كل منهما، أي أن القطرين ينصف كل منهما الآخر، وهو المطلوب . ☐

## مثال (٢)

إذا كان أب جـ د متوازي أضلاع، فيه أ(٢ ، ٠)، وكانت هـ(٥ ، ٤) نقطة تقاطع قطريه، جد طول القطر أ جـ .

**الحل:** طول القطر أ جـ = ٢ أ هـ = ٢ $\sqrt{(٥ - ٢)^٢ + (٤ - ٠)^٢}$ = ٢ $\sqrt{٩ + ١٦}$

= ٢ x ٥ = ١٠ وحدات .

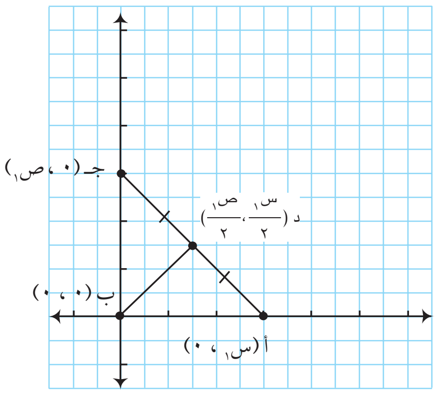
## نظريـة (٣):

**طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس القائمة ومنتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية ، يساوي نصف طول الوتر .**

المعطيات : أب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، والنقطة د منتصف الوتر أجـ .

المطلوب : إثبات أن طول القطعة ب د = نصف طول الوتر أ جـ .

البـرهان : يمكننا اختيار نظام الإحداثيات في المستوى بحيث تقع النقطة ب على نقطة الأصل ، وضلعا القائمة أب ، ب جـ على محور السينات والصادات على التوالي . كما في الشكل (١ – ٣٥) .



الشكل (١-٣٥)

∴ إحداثيات النقطة هي : د $\left(\frac{س_1}{٢} ، \frac{ص_1}{٢}\right)$ .

وطول الوتر أجـ $= \sqrt{(س_1 - ٠)^٢ + (٠ - ص_1)^٢}$

$= \sqrt{(س_1)^٢ + (ص_1)^٢}$

وطول ب د $= \sqrt{\left(\frac{س_1}{٢} - ٠\right)^٢ + \left(\frac{ص_1}{٢} - ٠\right)^٢}$

$= \sqrt{\frac{(س_1)^٢ + (ص_1)^٢}{٤}}$

$= \frac{١}{٢}\sqrt{(س_1)^٢ + (ص_1)^٢}$

∴ ب د $= \frac{١}{٢}$ أجـ وهو المطلوب . □

## مثال (٣)

إذا كان أب جـ مثلثاً قائم الزاوية في أ، وكانت د منتصف ب جـ بحيث أ (١ ، ٥)، د (٢ ، ٦)، فما طول الوتر ب جـ؟

## الحـــل:

أد = $\sqrt{(٢ - ١)^{٢} + (٦ - ٥)^{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ وحدة.

لكن أد = $\frac{١}{٢}$ ب جـ ، ولذلك فإن ب جـ = ٢ أد

= ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة.

## تدريبات صفّية

١ إذا كان س ص ع مثلّثاً قائم الزاوية في ص، وكانت ل منتصف س ع بحيث س(٦ ، ٣)، ع(٩ ، ٧).
أجد طول ل ص

٢ إذا كان هـ جـ ك مثلّثاً قائم الزاوية في جـ. وكانت س منتصف هـ ك، بحيث جـ (-١ ، ٢)، س (٤ ، -٢). أجد طول الوتر هـ ك

## تمارين ومسائل

١ إذا كان أب جـ د متوازي أضلاع فيه أ(٢ ، ٤)، ب(-٣ ، ٢)، وكانت هـ (-٦ ، -٢) نقطة تقاطع قطريه. أجد طول كل من القطرين.

٢ أثبت باستخدام الهندسة التحليلية أن قطري المستطيل متساويان، وينصف كل منهما الآخر.

٣ إذا كانت أ(٢ ، ٤)، ب(٠ ، ٣)، جـ(١ ، ١) رؤوس مثلث، أثبت أن هذا المثلث قائم الزاوية، ثم احسب طول القطعة الواصلة بين رأس القائمة ومنتصف الوتر.

٤ أ ب جـ مثلث حيث د ، هـ منتصفات أ ب ، أ جـ على الترتيب ، فإذا كان ب (٥ ، ١)، جـ (١ ، ٤) أجد : ١) ميل القطعة المستقيمة د هـ ٢) طول القطعة المستقيمة د هـ

# ١-٩ معادلة الدائرة

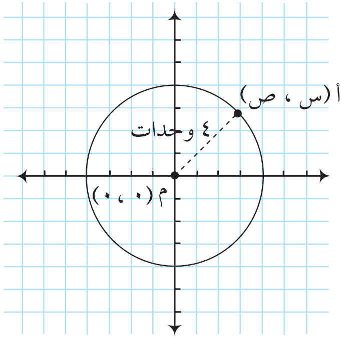
مر معنا أن الخط المستقيم يمثل بمعادلة على الصورة : أس + ب ص + جـ = ٠

حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية و أ ، ب لا يساويان صفراً معاً . فكيف تكون معادلة الدائرة؟

## مثال (١)

يمثل الشكل (١-٣٦) المجاور دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٤ وحدات .

أكتب معادلة الدائرة .




الشكل (١-٣٦)

## الحل:

لتكن أ (س ، ص) أية نقطة على الدائرة .

م أ = ٤ وحدات

$\Leftarrow \sqrt{(\text{س}-٠)^{٢} + (\text{ص} - ٠)^{٢}} = ٤$

$\Leftarrow \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}} = ٤$

$\Leftarrow \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١٦$ وهذه هي معادلة الدائرة المطلوبة

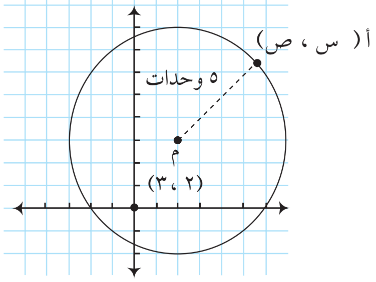
بشكل عام، يمكنك استنتاج أن :

**معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نق هي : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{نق}^{٢}$**

## مثال (٢)

يمثل الشكل (١-٣٧) المجاور دائرة مركزها النقطة م (٢ ، ٣) ونصف قطرها ٥ وحدات .

أكتب معادلة الدائرة .




الشكل (١-٣٧)

## الحل:

لتكن أ (س ، ص) أي نقطة على الدائرة .

م أ = ٥ وحدات

$\sqrt{(\text{س} - ٢)^{٢} + (\text{ص} - ٣)^{٢}} = ٥$

$(\text{س} - ٢)^{٢} + (\text{ص} - ٣)^{٢} = ٢٥$ وهذه هي معادلة الدائرة المطلوبة

بشكل عام ، يمكنك استنتاج أن :

**معادلة الدائرة التي مركزها (د ، هـ) ونصف قطرها نق هي : (س − د)$^{٢}$ + (ص − هـ)$^{٢}$ = نق$^{٢}$**

## مثال (٣)

دائرة مركزها م (٢ ، ٢) وتمر بالنقطة أ (٤ ، ٥) . أكتب معادلة الدائرة .

**الحل:**

نق = م أ

$= \sqrt{(٤ - ٢)^{٢} + (٥ - ٢)^{٢}} = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$ وحدة

معادلة الدائرة :

(س − د)$^{٢}$ + (ص − هـ)$^{٢}$ = نق$^{٢}$

أي (س − ٢)$^{٢}$ + (ص − ٢)$^{٢}$ = ١٣

## مثال (٤)

جد احداثيات المركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها :

س$^{٢}$ − ٢س + ص$^{٢}$ + ٤ص = ١١

**الحل:**

نعيد كتابة المعادلة لتصبح على الصورة (س − د)$^{٢}$ + (ص − هـ)$^{٢}$ = نق$^{٢}$

ولذا نكمل المربع في المعادلة س$^{٢}$ − ٢س + ص$^{٢}$ + ٤ص = ١١ بالنسبة إلى س وبالنسبة إلى ص

تصبح المعادلة س$^{٢}$ − ٢س + ١ + ص$^{٢}$ + ٤ص + ٤ = ١١ + ١ + ٤

(س$^{٢}$ − ٢س + ١) + (ص$^{٢}$ + ٤ص + ٤) = ١٦

⇐ (س − ١)$^{٢}$ + (ص + ٢)$^{٢}$ = ١٦

∴ احداثيات المركز (١ ، −٢) ، نق$^{٢}$ = ١٦ أي أنّ نق = ٤

## تمارين ومسائل

١ أجد معادلة الدائرة في كل من الحالات الآتية :

أ) مركزها (٠ ، ٠) ونصف قطرها ٦ وحدات

ب) مركزها (٠ ، ٢) ونصف قطرها ٢ وحدة

جـ) مركزها (−٢ ، −١) ونصف قطرها $\sqrt{٦}$ وحدة

٢ أجد احداثيات المركز وطول نصف قطر الدائرة في الحالات الآتية :

أ) $س^٢ + ص^٢ = ٨١$

ب) $(س-٣)^٢ + (ص+٤)^٢ = ٩$

جـ) $س^٢ - ٦س + ص^٢ - ٨ص =$ صفر

د) $س^٢ + ص^٢ + ٢س = ٨$

٣ أبيّن أن النقطة (٢ ، ٣) تقع على الدائرة $س٢ + ص٢ + ٢س + ٢ص - ٢٣ = ٠$

٤ أبيّن أن المعادلة $س^٢ + ص^٢ - ٦س = ٠$ هي معادلة دائرة ثم أجد احداثيات المركز وطول نصف القطر .

٥ أجد معادلة الدائرة التي تكون النقطتان أ (−٥ ، ١) ، ب (٣ ، ٧) طرفي قطرٍ فيها .

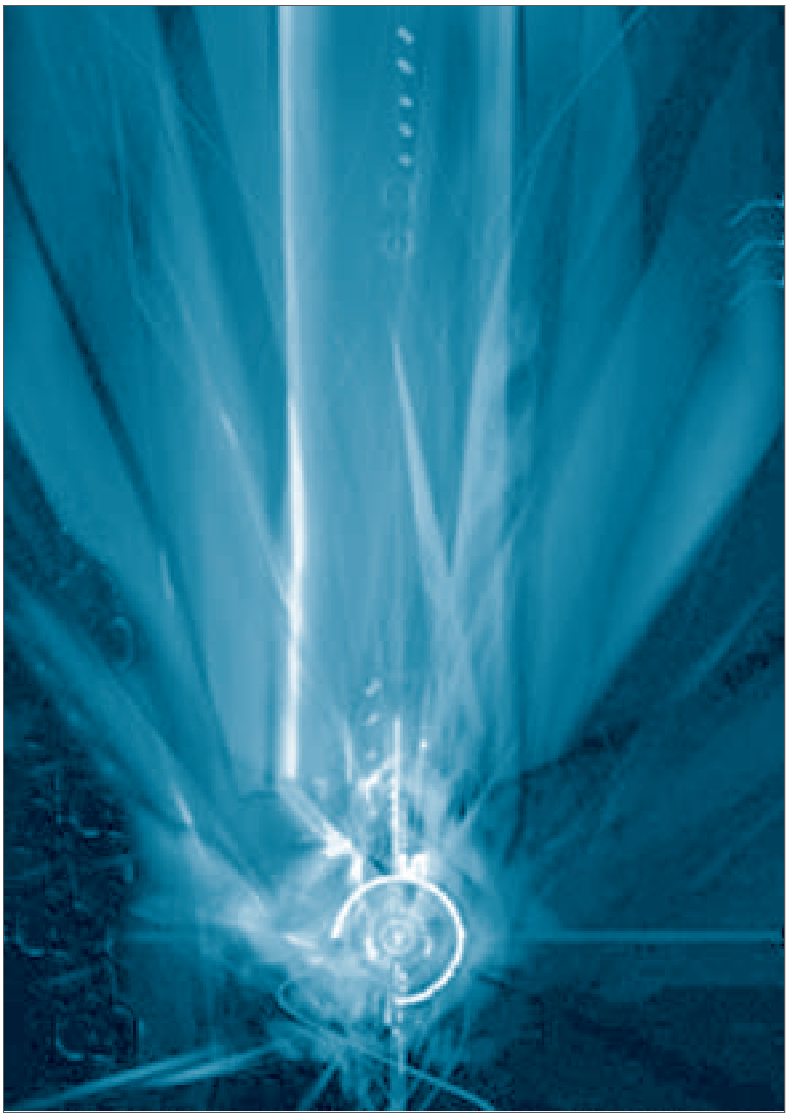
٦ أوجد احداثيات المركز وطول نصف قطر الدائرة ثم أرسمها في المستوى الديكارتي في كل مما يأتي :

أ) $س^٢ + ص٢ - ٤ = ٠$

ب) $(س + ١)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ١٦$

الوحدة
# ٢

# المعـــــادلات والمتبايـــــنات



# ٢-١ المعادلة الخطية في متغيرين

تعلمت في الوحدة السابقة معادلة الخط المستقيم والتي يمكن كتابتها على الصورة :

أ س + ب ص + جـ = صفر : أ ، ب ، جـ ∈ ح ، حيث أ ، ب لا تساويان صفراً معاً .

وهذه الصورة هي معادلة خطّية في متغيرين ، ولذا فإنّ حل هذه المعادلة هو مجموعة جميع الأزواج المرتّبة (س ، ص) التي تحقق المعادلة وبالتالي تقع على الخط المستقيم

**مثال(١):** ميّز المعادلات الخطية من غيرها في كل مما يأتي ، وعيّن القيم أ ، ب ، جـ في المعادلات الخطية منها :

أ) ٣س − ص + ١ = صفر

ب) ٢س + ٥ = صفر

جـ) ٣ س = ٢ ص −٧

د) $س^{٢}$ − ١ = ١٧

هـ) ٣ س + $ص^{٢}$ = ٥

و) $\frac{١}{س} = \frac{١}{ص} + ٢$

**الحــل:**

أ) معادلة خطية أ = ٣ ، ب = −١ ، جـ = ١

ب) معادلة خطية أ = ٢ ، ب = صفر ، جـ = ٥

جـ) ٣س = ٢ ص −٧ ⟺ ٣س − ٢ ص + ٧ = صفر

∴ معادلة خطية أ = ٣ ، ب = −٢ ، جـ = ٧

د) ليست معادلة خطية لوجود $س^{٢}$

هـ) ليست معادلة خطية لوجود $ص^{٢}$

و) ليست خطية ، لأنّه لا يمكن وضعها على الصورة العامة أس + ب ص + جـ = ٠

**مثال(٢):** إذا كان ٣ س + ٢ص = ٦ ، فأوجد قيمة ص بدلالة س .

*(تسمى هذه العمليّة تغيير موضوع القانون إلى ص) .*

**الحل:** ٣ س + ٢ ص = ٦

⇐ ٢ص = −٣ س + ٦

$$\Leftarrow \text{ص} = -\frac{٣}{٢}\text{س} + ٣$$

**مثال(٣):** إذا كان $\frac{١}{٣}$ س − ص + ٢ = صفر ، اجعل س موضوع القانون .

**الحل:** $\frac{١}{٣}$ س − ص + ٢ = صفر

⇐ $\frac{١}{٣}$ س = ص − ٢

⇐ س = ٣ص − ٦

*(يمكن استخدام أي رمزين آخرين بدل س ، ص في المعادلة الخطية)*

**مثال(٤):** إذا كان ثمن البرتقالة الواحدة سبعة قروش ، وثمن التفاحة الواحدة ستة قروش ، وكان ثمن س برتقالة وص تفاحة = ٥٠ قرشاً . أكوّن معادلة من هذه المعطيات .

**الحل:** ثمن س برتقالة = ٧س قرشاً

ثمن ص تفاحة = ٦ص قرشاً

⇐ ثمن س برتقالة و ص تفاحة = ٧س + ٦ص

⇐ المعادلة المطلوبة ٧س + ٦ص = ٥٠

## تدريبات صفّية

١ أميّز المعادلة الخطية من غيرها فيما يأتي :

أ) ٢ص – س = ٤ ب) س$^{٢}$ – ٣ص = ٧

جـ) $\sqrt{\text{س}}$ + ص = ٤ د) س ص = ١٥

٢ أكتب المعادلتين الخطيتين الآتيتين على الصورة أس + ب ص + جـ = ٠ ، ثم أجد القيم المناظرة لكل من أ ، ب ، جـ في كل منها :

أ) ٣س + ٧ = ص ب) $\frac{١}{٢}$ س – $\frac{١}{٥}$ ص = ١

٣ أجعل المتغير ص موضوعاً للقانون في كل مما يأتي :

أ) ع + ص = ٧ ب) س – ص = ١٠

جـ) $\frac{\text{س}}{٢}$ – $\frac{\text{ص}}{٧}$ – ٣ = صفر د) ٣ ل – $\frac{١}{٢}$ ص = ٢

## تمارين ومسائل

١ إذا كانت النقطة (٢ ، ٧) تقع على المستقيم الذي معادلته أ س + ب ص = ٢٠ ، أكوّن معادلة خطّية من هذه المعلومات .

٢ إذا كان ثمن الدفتر الواحد س قرشاً ، وثمن القلم الواحد ص قرشاً ، وكان مجموع ثمن ٥ دفاتر و ٨ أقلام ٢٤٠ قرشاً . أكوّن معادلة خطية بدلالة س ، ص للتعبير عن ذلك .

٣ أعبّر عن ص بدلالة س في المعادلة : ٣س – $\frac{\text{٧ص}}{٦}$ = ٢

# ٢ - ٢ حل نظام من معادلتين خطيتين

تعلمت في درس سابق أن المعادلة الخطية في متغيرين لها عدد لا نهائي من الحلول، يمثّلها خط مستقيم واحد في المستوى الديكارتي، وإذا كان لدينا معادلتان خطيتان، يظهر أمامنا عند تمثيلهما بيانياً معاً حالات ثلاث هي :

١ أن يتقاطع الخطان في نقطة واحدة (س ، ص) ويُسمّى الزوج المرتب في هذه الحالة حل المعادلتين آنياً .

٢ أن يتوازى الخطان المستقيمان، وفي هذه الحالة لا يوجد نقطة تقاطع ، أي أنه لا يوجد حل لهاتين المعادلتين معاً .

٣ أن يتطابق الخطان، أي أنهما خط واحد، وهذا يعني أن عدد الحلول لا نهائي .

هذا وسوف نقصر البحث في هذا الدرس على أنظمة المعادلات التي لها حل واحد، أي أن الخطين المستقيمين الممثلين لهما يتقاطعان في نقطة واحدة .

## الطريقة الأولى - الحل بطريقة التمثيل البياني (الرسم)

يمكن تلخيص هذه الطريقة بأن نقوم بالتمثيل البياني للمعادلتين على مستوى ديكارتي واحد، ثم نقرأ نقطة التقاطع على شكل زوج مرتب (س، ص) فيكون هو الحل .

**مثـــال:** أوجد بواسطة التمثيل البياني حل المعادلتين :

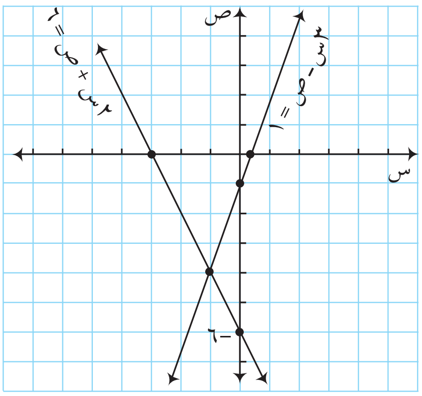
٣ س − ص = ١

٢ س + ص = −٦

**الحـــل:** نستخدم طريقة المقاطع لتمثيل المعادلتين كما في الشكل (٢−١)

| ٣س−ص=١ | | |
|---|---|---|
| س | ٠ | $\frac{١}{٣}$ |
| ص | −١ | صفر |

| ٢س+ص= −٦ | | |
|---|---|---|
| س | ٠ | −٣ |
| ص | −٦ | صفر |




الشكل (٢−١)

من الشكل(٢−١) نلاحظ أن نقطة التقاطع هي (−١ ، −٤) أي أن حل المعادلتين آنياً هو :

س = −١ ، ص = −٤

## تدريبات صفّية

أحل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية بواسطة التمثيل البياني :

أ) س − ص = ٧
ص = ٢س +١

ب) س + ٢ ص = ٤
٢س − ص = ٣

جـ) ٣س + ٢ ص = ٥
٣س − ٢ ص = ١

د) س = ص − ١
ص = ٢س +٣

## تمارين ومسائل

١ إذا كان مجموع عددين س ، ص يساوي ٢٠ ، وكان الفرق بينهما ٦ ، أكون نظاماً من معادلتين خطيتين ثم أجد العددين بطريقة التمثيل البياني .

٢ إذا كان ثمن ثلاث تفاحات و ٧ برتقالات ٣٣ قرشاً وكان ثمن خمس تفاحات و ٧ برتقالات ٤١ قرشاً . أكون معادلتين خطيتين ثم أجيب عن الأسئلة الآتية :

أ) أمثل المعادلتين بيانياً مستعملاً محور السينات لثمن التفاح ومحور الصادات لثمن البرتقال .

ب) أجد من الرسم ثمن التفاحة الواحدة ، وثمن البرتقالة الواحدة .

جـ) ما ثمن ٨ تفاحات وإثنتي عشرة برتقالة؟

د) ما ثمن ٤ تفاحات و ٦ برتقالات؟

هـ) ما ثمن تفاحتين وثلاث برتقالات؟

## الطريقة الثانية: الحل بطريقة الحذف

**مثـــال:** جد مجموعة الحل بطريقة الحذف للمعادلتين الآتيتين ، ثمّ تحقق من صحة الحل :

٢س + ص = ٨

٣س − ٢ص = ١٢

**الحـــل:**

٢س + ص = ٨ ... (١)

٣س − ٢ص = ١٢ ... (٢)

٤س + ٢ص = ١٦ ... (١) (بضرب طرفي المعادلة(١) في ٢ )

٣س − ٢ص = ١٢ ... (٢)

نجمع المعادلتين (١)،(٢) للتخلص من ص ، فتصبح : ٧س = ٢٨ ⇐ س = ٤

نعوض قيمة المتغير س في أي من المعادلتين ولتكن الأولى : ٢س + ص = ٨ ... (١)

٨ + ص = ٨ ⇐ ص = صفر

أي أن مجموعة الحل هي { (٤ ، ٠) }

**التحقق:** نعوّض بدل س بالقيمة ٤ وبدل ص بالقيمة صفر في المعادلتين (١) ، (٢)

المعادلة الاولى تصبح ٢ x ٤ + صفر = ٨ صحيحة

المعادلة الثانية تصبح ٣ x ٤ − ٢ x صفر = ١٢ صحيحة

## تدريبات صفّية

أستخدم طريقة الحذف لحل كل من أنظمة المعادلات الخطية الآتية :

أ) س + ص = ١٥
س − ص = ٥

ب) ٢أ + ٣ب = ٩
٤أ + ب = ١٣

جـ) ٢س − ص = ٥
(س/٤) + (ص/٣) = ٢

## تمارين ومسائل

أستخدم طريقة الحذف لحل المعادلات الخطية الآتية آنياً، ثم أتحقق من صحة الحل :

أ) س + ٢ص = ١٧
٣س + ٤ص = ٢٣

ب) ٧س + ٥ص = ٣٢
٨س + ٣ص = ٤٥

جـ) س − ٢ص = −٤
٣س + ص = ٩

د) ٤س − ٠,٥ ص = ١٢,٥
٣س + ٠,٨ ص = ٨,٢

## الطريقة الثالثة - الحل بطريقة التعويض

**مثــال:** جد مجموعة الحل بطريقة التعويض للمعادلتين الآتيتين:

$$س + ص = -٣ \quad ...(١)$$

$$س + ٢ص = ٢ \quad ...(٢)$$

**الحــل:**

(١) نأخذ المعادلة الأولى $س + ص = -٣$ ونغيّر موضوع القانون فيها إلى ص فتصبح

$$ص = -٣ - س$$

(٢) نعوض قيمة $ص = -٣ - س$ في المعادلة الثانية $س + ٢ص = ٢$ فتصبح:

$$س + ٢(-٣ - س) = ٢$$

$$س - ٦ - ٢س = ٢$$

$$-٦ - س = ٢$$

$$س = -٨$$

(٣) نعوض $-٨$ بدل س في المعادلة $ص = -٣ - س$

$$ص = -٣ - (-٨)$$

$$ص = ٥$$

∴ الحل هو الزوج المرتب $(-٨ ، ٥)$

## تدريبات صفّية

١ أستخدم طريقة التعويض لحل كل من أنظمة المعادلات الآتية:

(أ) $س + ص = ٥$ ، $ص = س + ١$

(ب) $ص = ٣س$ ، $س + ٢ص = ٧$

(جـ) $س - ص = ٣$ ، $س + ص = ٧$

٢ أستخدم طريقة التعويض لحل كل من أنظمة المعادلات الآتية، ثم أتحقق من صحة الحل:

(أ) $أ + ٢ب = ١٠$ ، $٢أ - ب = ٥$

(ب) $\frac{أ}{٤} - \frac{ب}{٥} = صفر$ ، $أ + ب = ٩٠$

(جـ) $\frac{أ + ب}{٢} = ١$ ، $\frac{أ - ب}{٢} = ٥$

## ٢ - ٣ تطبيقات على المعادلات الخطية:

نتعرض في حياتنا اليومية إلى العديد من المسائل التي يمكن حلها بتكوين معادلات وحل تلك المعادلات.

ولا بد من الإشارة هنا إلى أنه لحل مثل هذه المسائل نتبع الخطوات الآتية:

١) نقرأ المسألة قراءة جيدة ونفهم المعطيات والمطلوب.

٢) نمثل المتغيرات في السؤال برموز مثل س ، ص ، . . .

٣) نحول الجمل الكلامية إلى معادلات جبرية.

٤) نحل المعادلتين بأي من الطرق السابقة ونجد قيمة المطلوب في المسألة.

ولندرس الآن الأمثلة الآتية التي توضح خطوات الحل أعلاه:

**مثال (١)** إذا علمت أن قياس إحدى زوايا مثلث هو ٩٠° وأن الفرق بين قياسي الزاويتين الأخريين هو ٣٦° أوجد قياس الزاوية الصغرى في المثلث.

**الحل:**

١ نفرض أن قياسي الزاويتين الباقيتين بالدرجات هما س ، ص.

٢ بما أن قياس إحدى زوايا المثلث = ٩٠° ∴ مجموع س ، ص هو ٩٠°

س + ص = ٩٠°

٣ بما أن الفرق بين قياسي الزاويتين = ٣٦°

س − ص = ٣٦°

٤ س + ص = ٩٠ . . .(١)

س − ص = ٣٦ . . .(٢)

٥ نحل المعادلتين بحذف ص، وذلك بجمع المعادلتين (١) ، (٢)

∴ ٢س = ١٢٦

⇐ س = ٦٣°

بالتعويض في المعادلة (١) س + ص = ٩٠

٦٣ + ص = ٩٠

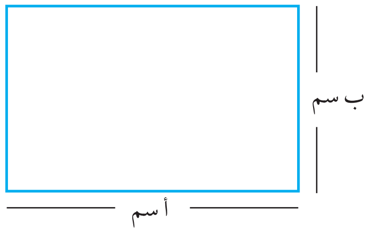
∴ ص = ٩٠ − ٦٣

ص = ٢٧°

∴ قياس الزاوية الصغرى في هذا المثلث = ٢٧°.

**مثال(٢)** يزيد طول مستطيل عن عرضه ٥سم، أوجد أبعاد المستطيل إذا كان محيطه ٤٨سم .

**الحل:** نفرض أن الطول هو أ سم، و أن العرض هو ب سم، كما هو في الشكل (٢-٢) أدناه



الشكل (٢-٢)

بما أنّ الطول يزيد عن العرض ٥سم

∴ الطول – العرض = ٥

أي أنّ أ – ب = ٥ ... (١)

بما أنّ المحيط = ٤٨سم

∴ ٢ (الطول) + ٢ (العرض) = ٤٨

أي أنّ ٢أ + ٢ب = ٤٨ ... (٢)

بقسمة المعادلة (٢) على ٢ تصبح

أ + ب = ٢٤ ... (٢)

∴ أ – ب = ٥ ... (١)

أ + ب = ٢٤ ... (٢) (بجمع (١) ، (٢))

∴ ٢أ = ٢٩ ⇐ أ = ١٤,٥ سم

نعوّض قيمة أ في المعادلة (٢) أ + ب = ٢٤

⇐ ١٤,٥ + ب = ٢٤ ⇐ ب = ٩,٥سم

∴ طول المستطيل = ١٤,٥سم ، عرض المستطيل = ٩,٥سم

## تمارين ومسائل على حل المعادلات الخطية :

١ أجد عددين مجموعها ١٥ ، والفرق بينهما ٥ .

٢ إذا كان معدل عددين (الوسط الحسابي لهما) هو ٧ ، وكان ثلاثة أمثال الفرق بينهما يساوي ١٨ . أجد العددين .

٣ إذا كان الخط الذي معادلته ص + أس = جـ يمر بالنقطتين (١ ، ٥) ، (٣ ، ١) . أجد قيمة كل من أ، جـ .

٤ إذا كان مجموع ثمن ٥ كغم من سمك السردين ، و٢ كغم سمك البوري هو ١١ ديناراً ، بينما يبلغ مجموع ثمن ٣ كغم من سمك السردين و ٤ كغم من سمك البوري هو ١٥ ديناراً ، أحسب ثمن الكيلو غرام الواحد لكل نوع .

٥ إذا كان مجموع ثمن جهازي فيديو وثلاثة أجهزة تلفزيون هو ١٧٥٠ ديناراً بينما يبلغ ثمن أربعة أجهزة فيديو وجهاز تلفزيون واحد ١٢٥٠ ديناراً ، أحسب ثمن كل جهاز .

٦ لدى سلمى ٢٠ قطعة معدنية من فئة ١٠ قروش و ٥٠ قرشاً . فإذا كان مجموع ما معها ٤٨٠ قرشاً . أحسب عدد القطع من كل نوع .

٧ باع شخص ٣٠ تذكرة لحفلة بعضها من فئة ٦٠ قرشاً ، والباقي من فئة الدينار . فإذا كان مجموع قيمة جميع التذاكر ٢٢ ديناراً . أجد عدد التذاكر من كل نوع .

٨ إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث ٦٠°، وكان الفرق بين قياسي الزاويتين الأخريين ٤٥° . أجد قياس الزاوية الكبرى في المثلث .

٩ إذا كانت سرعة قارب باتجاه التيار ١٤م/ ث ، بينما سرعته في الاتجاه المعاكس ٦م/ ث . أجد سرعة القارب وسرعة التيار .

١٠ إذا زادت قيمة كل من البسط والمقام في كسر بمقدار ١ يصبح الكسر $\frac{٣}{٤}$ . أما إذا نقص كل من البسط والمقام بمقدار ١ يصبح الكسر $\frac{٢}{٣}$ . أجد قيمة الكسر الأصلي .

## ٢-٤ المتبايـــنــــات

### أولاً - المتباينة في متغيّر واحد:

تظهر المتباينة الخطية في متغيّر واحد بنفس صورة المعادلة الخطية في متغيّر واحد، مع فارق واحد هو وجود إحدى إشارات التباين < أو > أو ≤ أو ≥ بدل إشارة المساواة (=) مثل :

أس + ب < صفر ، ٢س − ٣ ≥ ٧

ولا بد من التذكير بأننا نستخدم نفس خطوات حل المعادلة لحل المتباينات، **مع مراعاة الخاصية أنه عند ضرب طرفي المتباينة في عدد سالب أو قسمتها على عدد سالب، فإننا نعكس وضع المتباينة من < إلى > ، وكذلك من > إلى <** .

**مثال (١):** إذا كانت ٥ > ٢ ، وضُرب الطرفان في −٧ فإنها تصبح :

٥ x −٧ < ٢ x −٧ لأن −٣٥ < −١٤

**مثال (٢):** إذا كانت ١٥ > ١٠ وقُسِمَ الطرفان على −٥ فإنها تصبح :

$\frac{١٥}{-٥} < \frac{١٠}{-٥}$ لأن −٣ < −٢

### سـؤال

أ− إذا ضُرب طرفا المتباينة ٦ > ٣ ، في (٧) . هل تتغير الإشارة؟ لماذا؟

ب− إذا قُسم كلٌ من طرفي المتباينة −١٨ < −١٥ ، على (−٣) . هل تتغير الإشارة؟ لماذا؟

تُستخدم الخاصيّتان السابقتان ( الضرب في عدد سالب، والقسمة على عدد سالب)، وخصائص أخرى في حل المتباينة .

**مثال (٣):** أكوّن متباينة تعبر عن الجملة الآتية (الحد الأدنى الذي يمكن شراؤه من محل جملة هو ١٥ كغم) .

**الحـــل:** إذا كان س كغم هو الكمية التي يمكن شراؤها من المحل فإنّ المتباينة المطلوبة هي س ≥ ١٥

**حل المتباينة:**

**هو إيجاد قيمة (قيم) المتغيّر التي عند تعويضها في المتباينة تكون العبارة الناتجة عبارة صحيحة .**

## مثال (٤): أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية في ح ، ثم مثّل الحل على خط الأعداد :

(١) ٢س ≥ ٤

(٢) ٢س −١ ≥ ٥

(٣) ٣س > س + ٣

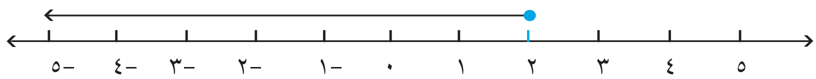
(٤) ١ − س < ٣

(٥) −٢س ≤ −٦

## الحل:

(١) ٢س ≥ ٤ ⇐ س ≥ ٢ (بقسمة الطرفين على ٢)

∴ مجموعة الحل = { س : س ≥ ٢ ، س ∈ ح }




**سـؤال:** ما هو أكبر عدد صحيح يحقق المتباينة أعلاه ؟

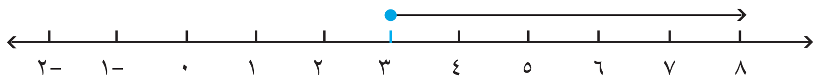
**الجواب:** بملاحظة خط الأعداد المرسوم أعلاه فإنّ العدد المطلوب هو س = ٢

(٢) ٢س −١ ≥ ٥

⇐ ٢س ≥ ٦ إضافة ١ إلى الطرفين

⇐ س ≥ ٣ قسمة طرفي المتباينة على ٢

∴ مجموعة الحل { س : س ≥ ٣ ، س ∈ ح }

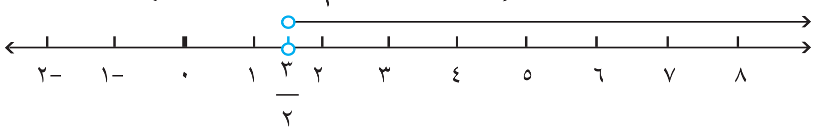



(٣) ٣س > س + ٣

٢س > ٣ إضافة − س إلى الطرفين .

⇐ س > $\frac{٣}{٢}$ قسمة طرفي المتباينة على ٢

∴ مجموعة الحل { س : س > $\frac{٣}{٢}$ ، س ∈ ح }



**ملاحظة:**

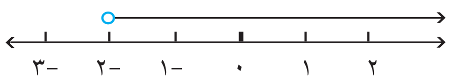
عند تمثيل الحل على خط الأعداد الحقيقية نستعمل الدائرة الخالية لتوضيح عدم انتماء العدد إلى مجموعة الحل ، والدائرة المظللة لتوضيح انتماء العدد إلى مجموعة الحل .

٤) ١ − س > ٣

⇐ ١ > ٣ + س　　إضافة س إلى طرفي المتباينة .

−٢ > س　　إضافة −٣ إلى طرفي المتباينة .

∴ مجموعة الحل هي { س : س > −٢ ، س ∈ ح }



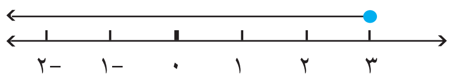
**ســؤال:** ما هو أصغر عدد صحيح يحقق المتباينة أعلاه ؟

**الجواب:** بملاحظة خط الأعداد المرسوم أعلاه فإنّ العدد المطلوب هو س = −١

٥) −٢ س ≥ −٦

س ≤ ٣　　قسمة طرفي المتباينة على −٢

∴ مجموعة الحل { س : س ≤ ٣ ، س ∈ ح }



## مثال (٤)

أوجد مجموعة حل المتباينة الآتية ، ثم مثّله على خط الأعداد :

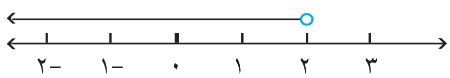
٥ > ٢س + ١ > س − ٢

**الحــل:** نجزئ المتباينة إلى متباينتين هما ٥ > ٢س + ١ ، ٢س + ١ > س − ٢

المتباينة الأولى　　٥ > ٢س + ١

⇐ ٤ > ٢ س　　(إضافة −١ إلى الطرفين)

⇐ ٢ > س　　(قسمة الطرفين على ٢)

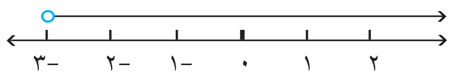


∴ مجموعة حل المتباينة الاولى هي : { س : س < ٢ ، س ∈ ح }

المتباينة الثانية ‏ ٢ س + ١ > س − ٢

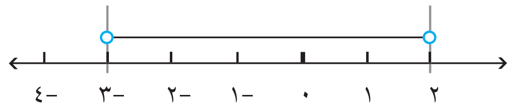
س + ١ > −٢ ‏ (إضافة − س)

س > −٣ ‏ (إضافة −١)



∴ مجموعة حل المتباينة الثانية هي : { س : س > −٣ ، س ∈ ح }

مجموعة حل المتباينة المركبة هو تقاطع مجموعتي حل المتباينتين المكونيتن لها كما هو على خط الأعداد أدناه



∴ مجموعة الحل { س : ٢ > س > −٣ س ∈ ح }

## تدريبات صفّية

١ أحل المتباينات الآتية وأمثل مجموعة الحل على خط الأعداد :

أ) ٤ س − ٥ > ٣ ‏ ب) ١ + ٣ س < ٤

جـ) ٥ > ٧ + س ‏ د) ٧ − ٥ س ≤ ٣

٢ أجد أكبر عدد صحيح يحقق المتباينات الآتية :

أ) ٢ س − ٣ < ٥ ‏ ب) ٤ − س ≥ ٢

٣ أجد أصغر عدد صحيح يحقق المتباينات الآتية :

أ) ٥ + س ≥ ٤ ‏ ب) صفر < ٣ + س

## تمارين ومسائل

١ أجد مجموعة الحل التي تحقق كلاً من المتباينات الآتية :

أ) س ≤ ١ و س > ٢ ‏ ب) ٢ < س + ١ < ٥ ‏ جـ) ١٢ > ٣ − س ≥ ٧

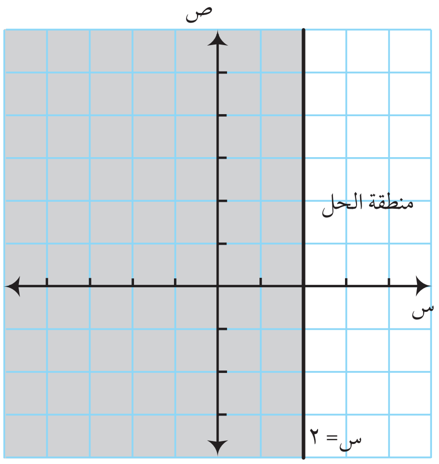
٢ أكوّن متباينة تمثل الجملة الآتية : (الحد الأعلى المسموح بنقله في حافلة ٥٠ راكباً).

٣ أكوّن متباينة تمثل الجملة الآتية : (تبقى درجات الحرارة هذه الليلة فوق الصفر).

## ثانياً - المتباينات الخطّية في متغيرين:

تعرفت في الدرس السابق كيفية حل متباينة خطية في متغير واحد وتمثيل الحل على خط الأعداد الحقيقية . وستتعرف في هذا الدرس كيفية استخدام المستوى الديكارتي في تمثيل مجموعة الحل للمتباينات الخطية في متغيرين .

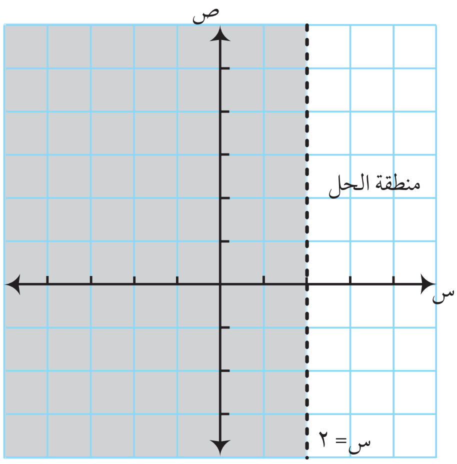
فلو أخذنا على سبيل المثال المتباينة س ≤ ٢ فإنه يمكن تمثيل الحل في المستوى الديكارتي برسم الخط المستقيم س = ٢ ، ثم تُظلل المنطقة التي لا تمثل الحل كما في الشكل (٢-٣) .



الشكل (٢-٣)

وملاحظة أن منطقة الحل هي المنطقة غير المظللة* .

أما إذا أردنا تمثيل منطقة الحل للمتباينة س < ٢ فإن التمثيل البياني كما في الشكل (٢-٤) .

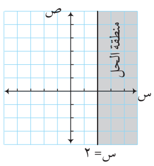


الشكل (٢-٤)

**ملاحظة:**

لاحظ الفرق بين الحالتين أعلاه، ففي الحالة الأولى كان الخط المستقيم س = ٢ متصلاً مما يعني أن الخط هو ضمن منطقة الحل ، أما في الحالة الثانية فكان الخط متقطعاً مما يعني أنه لا ينتمي إلى منطقة الحل .

*** ملاحظة للمعلم:**



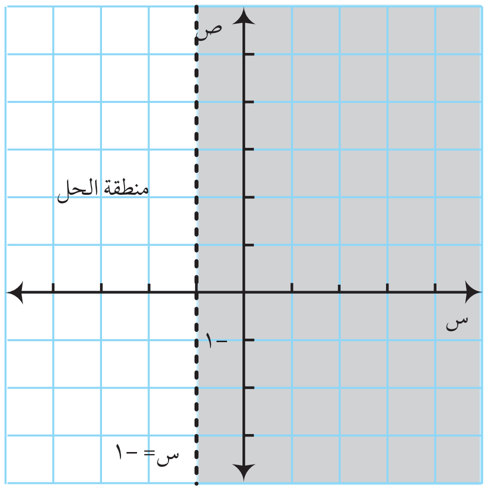

تكون منطقة الحل هي المنطقة غير المظللة ، وتكون المنطقة المظللة هي المنطقة التي لا تمثل الحل ، ويمكن للمعلم الحل بطريقة تظليل المنطقة المطلوبة وإبقاء المنطقة غير المطلوبة بدون تظليل ، أي الحل بالطريقة العكسية للطريقة أعلاه .

**مثال(١):** مثّل بواسطة الرسم المنطقة التي تمثل حل كل من المتباينات الآتية :

(١) $س < -١$  (٢) $ص \geq ٢$

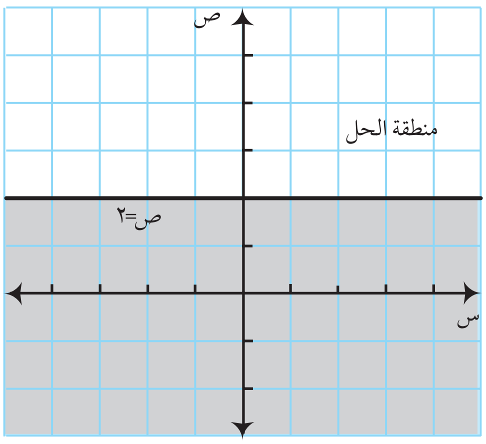
**الحل:** الأشكال (٢-٥)، (٢-٦) تمثّل مناطق الحل لكل متباينة :

(١) $س < -١$



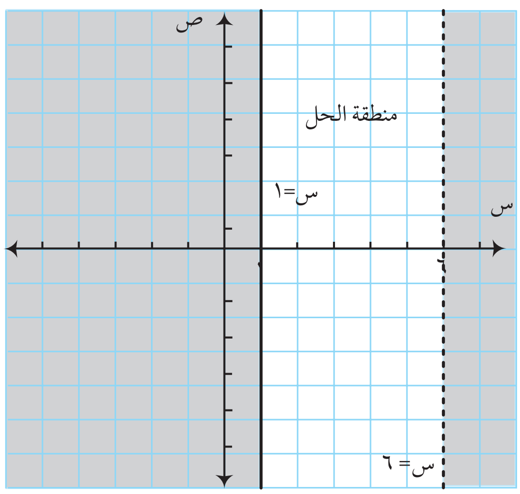

الشكل (٢-٥)

(٢) $ص \geq ٢$

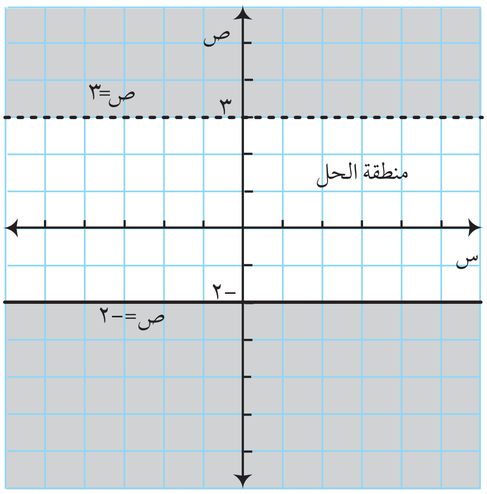



الشكل (٢-٦)

**مثال(٢):** أكتب المتباينات التي حلّها المناطق الموضحة في كل من الشكلين (٢-٧) ، (٢-٨) :




الشكل (٢-٧)




الشكل (٢-٨)

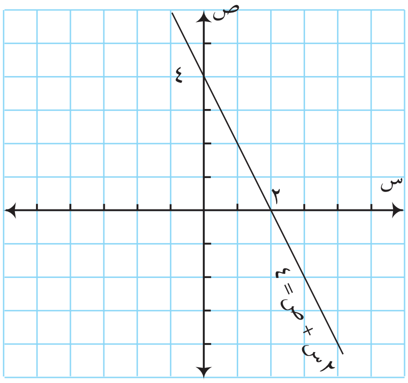
**الحل:** الشكل (٢-٧) هو حلّ للمتباينة $١ \leq س < ٦$

الشكل (٢-٨) هو حلّ للمتباينة $-٢ \leq ص < ٣$

## مثـال(٣): مثّل بيانيّا منطقة الحل للمتباينة ٢ س+ ص ≤ ٤

## الحــل:

أولاً: نرسم الخط المستقيم الفاصل الذي معادلته ٢س + ص = ٤ كما هو في الشكل (٢-٩) المجاور.



الشكل (٢-٩)

| س | صفر | ٢ |
|---|---|---|
| ص | ٤ | صفر |

ثانياً:

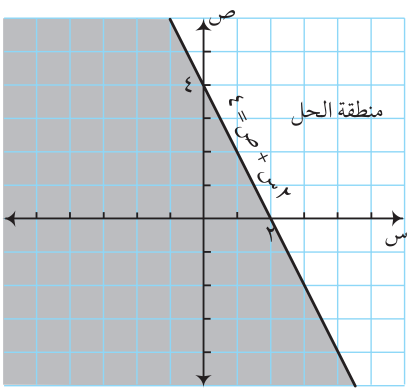
بالنسبة للمتباينة ٢س + ص ≤ ٤ ، نختار نقطة لا تقع على الخط المستقيم مثل (٠ ، ٠) ثم نعوض بدل س = صفر ، ص = صفر في المتباينة.

$$٢ \times ٠ + ٠ \overset{?}{\leq} ٤$$

٠ > ٤ ⇐ ٠ ≤ ٤ عبارة خاطئة.

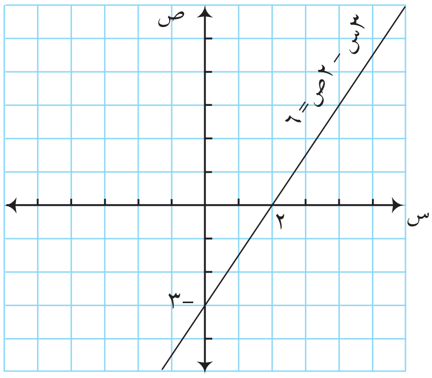
∴ (٠ ، ٠) لا تنتمي إلى منطقة الحل.

تُظلل هذه المنطقة كما هو في الشكل (٢-١٠) المجاور.



الشكل (٢-١٠)

## مثال (٤) أمثّل بواسطة الرسم على المستوى الديكارتي المنطقة التي تمثل حل المتباينة ٣س - ٢ص ≤ ٦



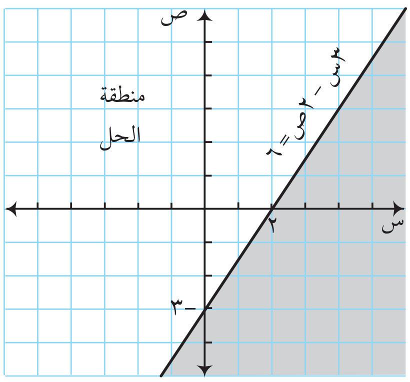
الشكل (٢-١١)

## الحــل: ٣ س - ٢ ص ≤ ٦

أولاً : نرسم الخط الذي معادلته ٣س - ٢ص = ٦
كما هو في الشكل (٢-١١) المجاور .

| س | صفر | ٢ |
|---|---|---|
| ص | -٣ | صفر |

ثانياً :



الشكل (٢-١٢)

نأخذ نقطة مثل (٠ ، ٠) التي لا تقع على الخط المستقيم ونعوضها في المتباينة ٣س - ٢ص ≤ ٦

بدل س = صفر ، ص = صفر

⇐ ٣ x صفر - ٢ x صفر ≤ ٦

صفر ≤ ٦ عبارة صحيحة .

∴ (٠ ، ٠) تقع ضمن منطقة الحل أي أن الحل هو المنطقة التي تقع فيها النقطة (٠ ، ٠) .

نظلل المنطقة التي لا تمثّل الحل كما في الشكل (٢-١٢) المجاور .

## مثال (٥)

أوجد بواسطة الرسم المنطقة التي تحقق النظام الآتي من المتباينات

س ≥ −٣ ، ص ≥ −٢ ، س + ص ≤ ٣

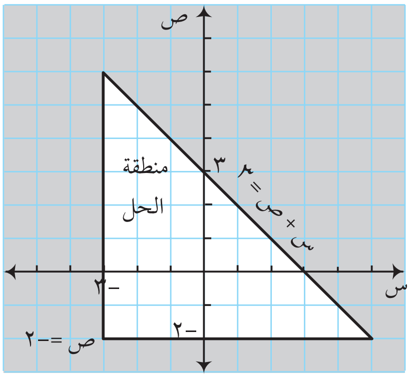
## الحـــل:

(١) س ≥ −٣ ، نرسم س = −٣ نظلل المنطقة التي لا تمثل الحل .

(٢) ص ≥ −٢ ، نرسم ص = −٢ نظلل المنطقة التي لا تمثل الحل .

(٣) س + ص ≤ ٣ ، نرسم الخط المستقيم س + ص = ٣

| س | ٠ | ٣ |
|---|---|---|
| ص | ٣ | ٠ |




الشكل (٢−١٣)

نختار نقطة لا تقع على الخط المستقيم مثل (٠ ، ٠) ونعوضها في

المتباينة : س + ص ≤ ٣

٠ + ٠ ≤ ٣

٠ ≤ ٣ عبارة صحيحة

∴ النقطة (٠ ، ٠) تنتمي إلى منطقة حل المتباينة

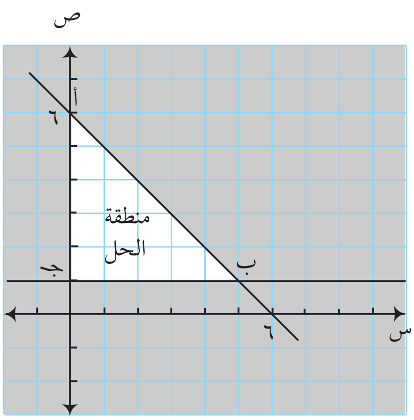
س + ص ≤ ٣ نظلل المنطقة التي لا تمثل الحل .

∴ منطقة الحل هي المنطقة التي لا يظهر فيها أي تظليل .

لاحظ الشكل (٢−١٣) المجاور .

## مثال (٦)

المثلث أ ب جـ المرسوم بالشكل (٢−١٤) المجاور يمثّل مجموعة حل لنظام من ثلاثة متباينات ، أكتب هذه المتباينات .




الشكل (٢−١٤)

## الحـــل:

معادلة ب جـ هي ص = ١

معادلة أ جـ هي س = ٠

نجد معادلة أ ب

$$\text{ميل أ ب} = \frac{٦ - ٠}{٠ - ٦} = -١$$

معادلة أ ب هي ص = −١ س + ٦

أو س + ص = ٦

وبعد أن أوجدنا جميع المعادلات الثلاث التي تمثل حدود المنطقة المطلوبة نحوّل كلاً منها إلى متباينات بالاستعانة بالشكل (٢−١٤) الذي يمثّل منطقة الحل .

المتباينات المطلوبة هي :

ص ≥ ١

س ≥ ٠

س+ ص ≤ ٦

## تدريبات صفّية

١ أرسم على المستوي الديكارتي حل كلّ من المتباينات الآتية، ثم أبيّن فيما إذا كانت النقطة (−١ ، ١) تنتمي إلى منطقة الحل .

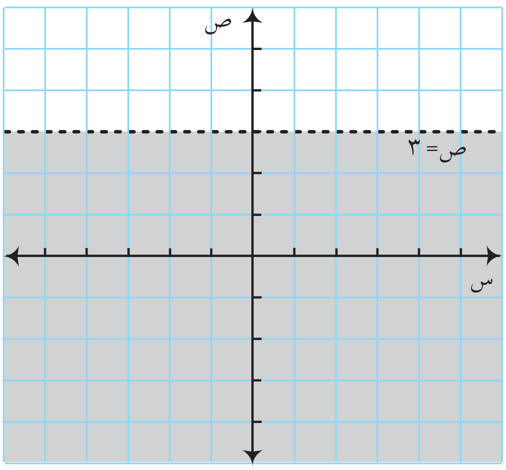
(١) ١ < س < ٤

(٢) −١ < ص ≤ ٢

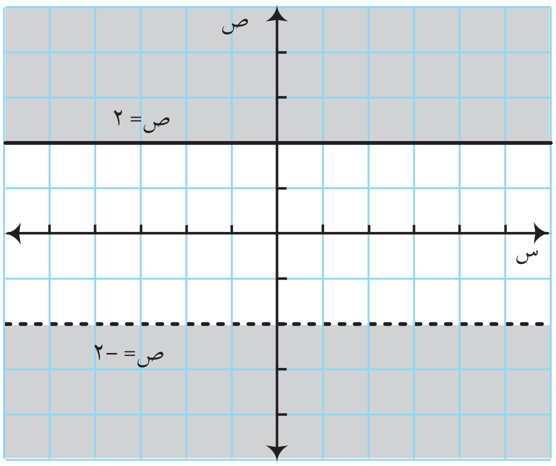
(٣) صفر ≥ س ≥ −٥

(٤) −٣ < ص ≤ صفر

٢ أكتب المتباينة التي تمثلها المنطقة غير المظللة في كل من الحالات الآتية :




الشكل (٢−١٥)




الشكل (٢−١٦)

## تمارين ومسائل

**١** أمثّل بواسطة الرسم على المستوى الديكارتي المناطق التي تمثل مجموعة حل كل من أنظمة المتباينات الآتية :

أ) س ≤ صفر ، ص ≤ ١   ب) ٢ ≥ س ≥ ٤ ، ٤ > ص > -٣ .

جـ) ٠ ≤ س < ٤ ، ٢ > ص > -٢ .   د) ١ ≤ س ، ٢ > ص > -١

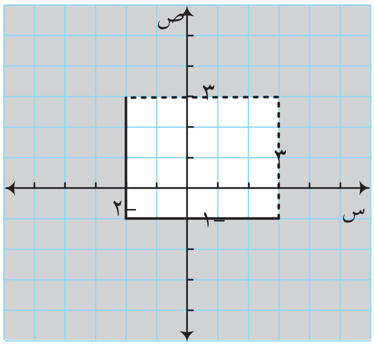
**٢** أجد بواسطة الرسم في المستوى الديكارتي المنطقة التي تمثل حل كل من نظام المتباينات الآتية :

أ)
ص > ٣
٢س + ٣ ص ≤ ٦
ص < س - ٢

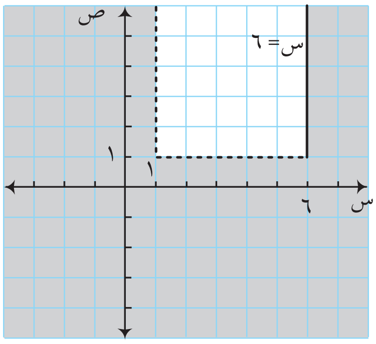
ب)
ص < س
ص > ٤ س
س + ص < ٥

جـ)
س ≤ صفر .
ص ≤ س - ١
٢ ص + س > ٤

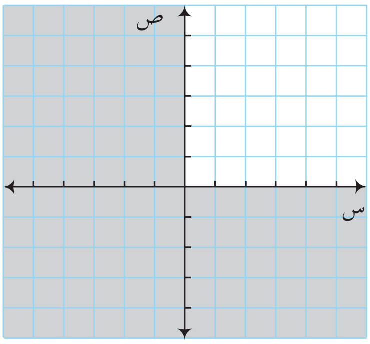
**٢** أجد مجموعة المتباينات التي تمثل المناطق غير المظـللة فيما يأتي :



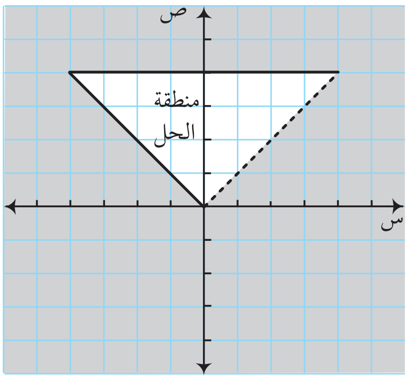
الشكل (٢-١٧)



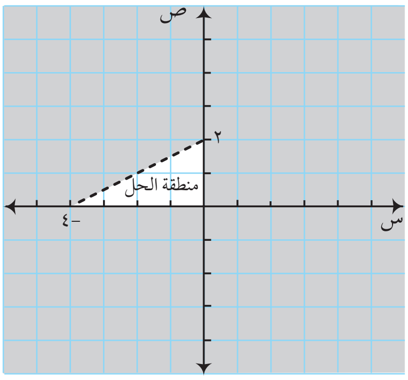
الشكل (٢-١٨)



الشكل (٢-١٩)



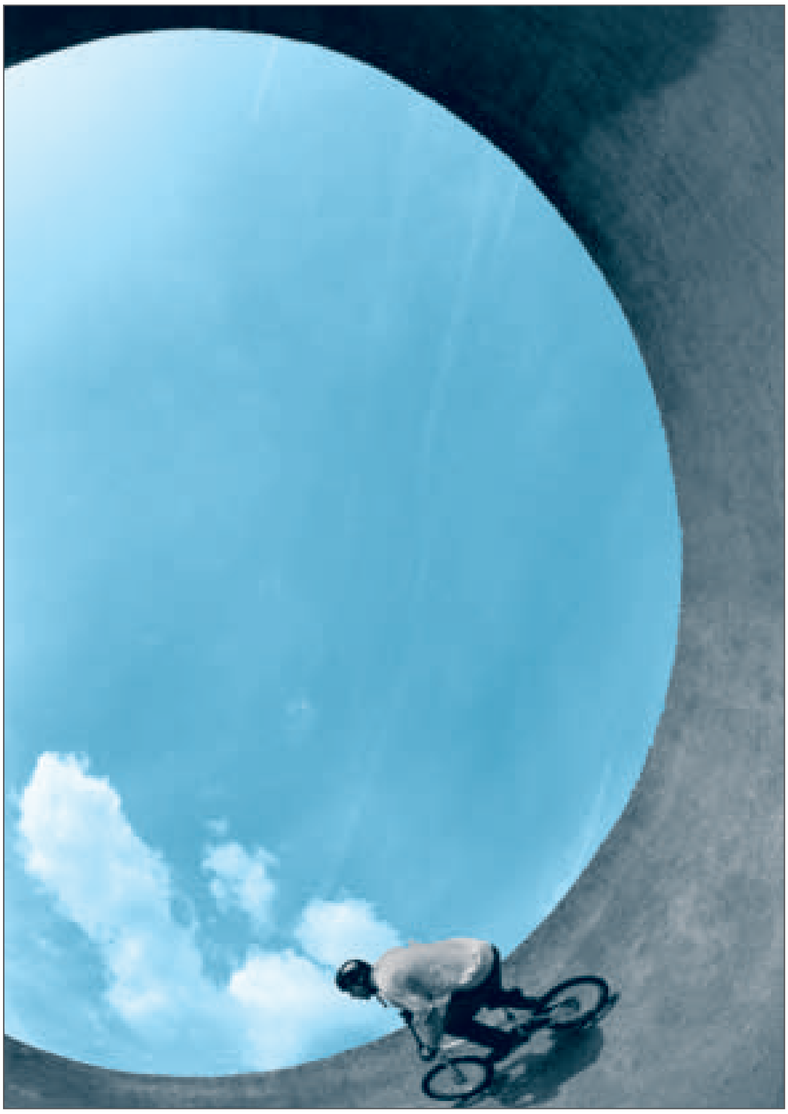
الشكل (٢-٢٠)



الشكل (٢-٢١)

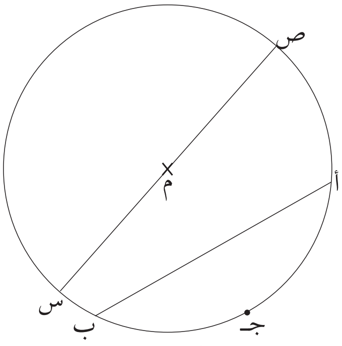
الوحدة
٣

# الدائـــــــــــرة



# ٣-١ الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

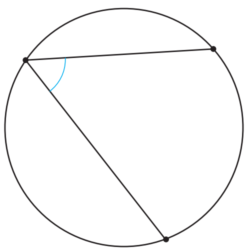
سبق لك وأن درست الدائرة وتعرفت المفاهيم الرئيسية فيها ويوضح الشكل (٣-١) المقابل دائرة مركزها م، فيها الوتر أ ب، والقطر س ص ، والقوس أ جـ ب، وستتعلم في هذا الدرس الزوايا المركزية والمحيطية في الدائرة، وعلاقة كل منهما بالأخرى .

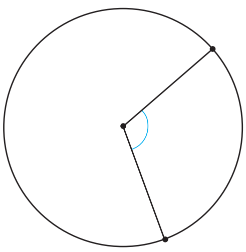


الشكل (٣-١)

## الزاوية المركزية والزاوية المحيطية:

- **الزاوية المركزية للدائرة : هي الزاوية التي يقع رأسها في مركز الدائرة، وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة .**
- **الزاوية المحيطية : هي الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة.**


الشكل (٣-٢)
زاوية محيطيّة


الشكل (٣-٣)
زاوية مركزية

### نظريـــة:

**الزاوية المركزية تساوي ضعفي الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس.**

المعطيات : دائرة مركزها م، ∢ أ م ب زاوية مركزية، ∢ أ جـ ب زاوية محيطية، مرسومتان على نفس القوس

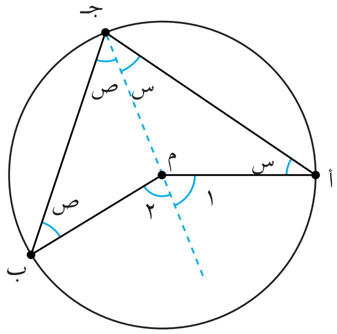
المطلوب : إثبات أن ∢ أ م ب = ٢ ∢ أ جـ ب

∴ ∢ ١ = ٢س . . . (١) (خارجة بالنسبة للمثلث أ م جـ)

وبالمثل ∢ ٢ = ٢ ص . . . (٢) (خارجة بالنسبة للمثلث ب م جـ)

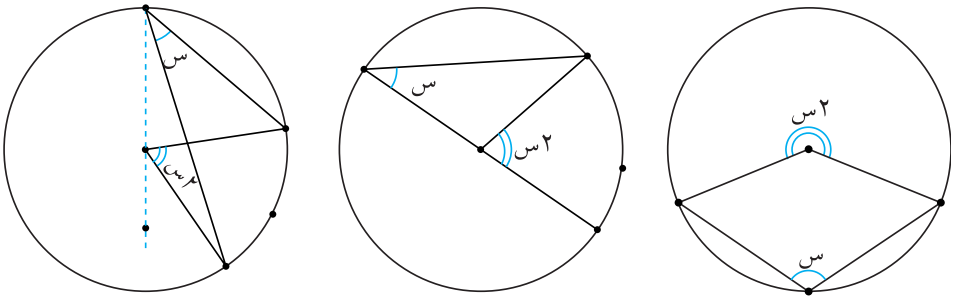
بجمع النتيجتين (١) و (٢) : ينتج أنّ ∢ ١ + ∢ ٢ = ٢س + ٢ ص

أي أنّ ∢ أ م ب = ٢ ∢ أ جـ ب وهو المطلوب $\square$



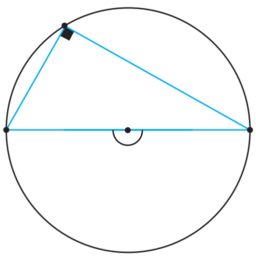
الشكل (٣-٤)

لاحظ الأشكال أدناه والتي توضح النظرية السابقة :




الشكل (٣-٥)

**حالة خاصّة :** الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة تساوي ٩٠°



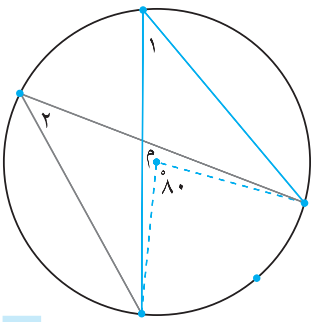
الشكل (٣- ٦)

لاحظ الشكل (٣-٦) المقابل ، حيث الزاوية المركزية ١٨٠° لذا فإن الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس تساوي ٩٠° .

## مثال (١) :

في الشكل (٣-٧) المجاور م مركز الدائرة أوجد قياس

∡١ ، ∡٢




الشكل (٣- ٧)

## الحل:

∡١ = ٤٠°

∡٢ = ٤٠° (حسب النظرية السابقة)

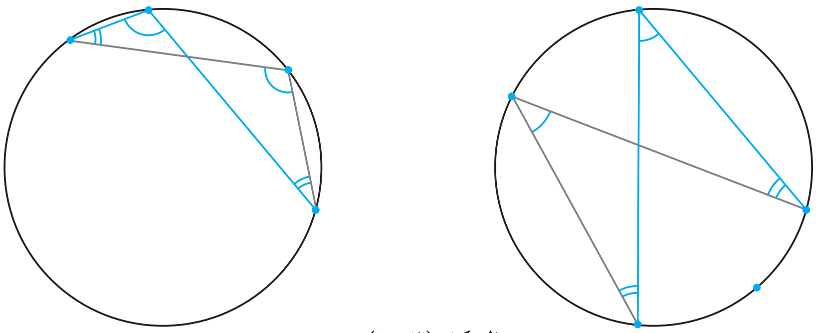
أي أنّ ∡١ = ∡٢

المثال أعلاه يؤكد النتيجة التالية :

## نتيجة:

**الزاويتان المحيطيتان المرسومتان على قوس واحد متساويتان.**

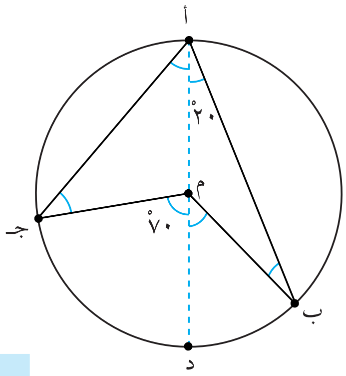
لاحظ الشكلين أدناه اللذين يوضّحان هذه النتيجة .



الشكل (٣- ٨)

## مثال(٢):

في الشكل (٣-٩)، إذا كان ∡ ب أ م = ٢٠°،
∡ جـ م د = ٧٠°، جد قياس ∡ ب م د، ∡ جـ أ م



الشكل (٣-٩)

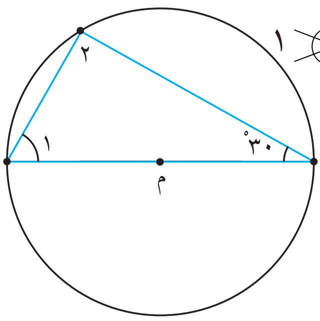
## الحل:

∡ ب م د = ٢ (∡ ب أ م) = ٢ x ٢٠° = ٤٠°

∡ جـ أ م =٣٥° (حسب النظرية السابقة)

## مثال(٣):

في الشكل (٣-١٠)، م مركز الدائرة، أوجد قياس ∡ ١



الشكل (٣-١٠)

## الحل:

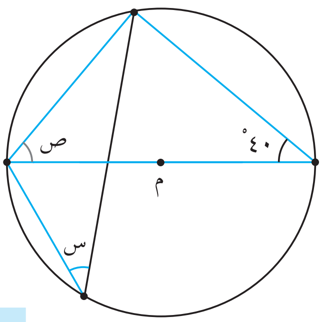
∡ ٢ = ٩٠° (مقابلة للقطر)

∴ ∡ ١ = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°

## مثال(٤):

في الشكل (٣-١١)، م مركز الدائرة.

أوجد قيمة كل من س ، ص



الشكل (٣-١١)

## الحل:

س = ٤٠° (محيطيتان مشتركتان في القوس)

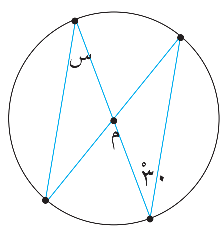
ص = ١٨٠° − (٤٠° + ٩٠°)

ص = ٥٠°

## تدريبات صفّية

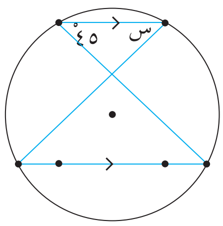
١ أجد قيمة س في كل من الأشكال الآتية، حيث م مركز الدائرة.

أ

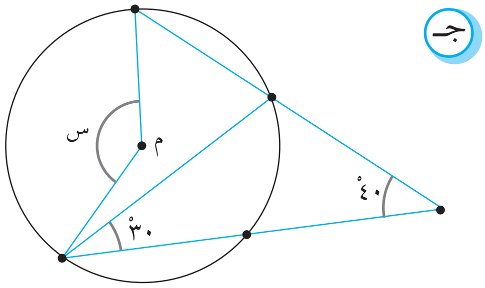


الشكل (٣-١٢)

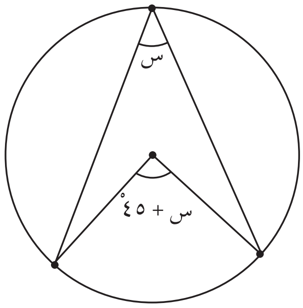
ب



الشكل (٣-١٣)



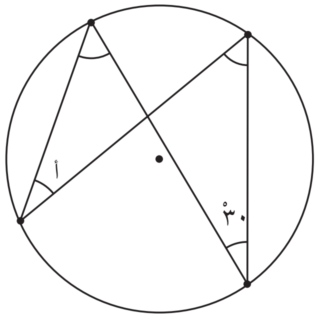

الشكل (٣-١٤)



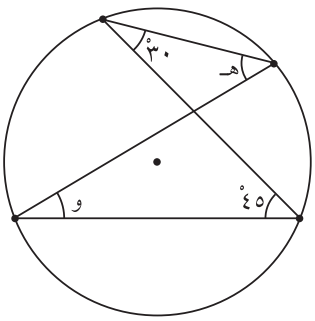

الشكل (٣-١٥)

## تمارين ومسائل

١ أجد الزوايا المشار إليها الرموز، في الشكلين (٣-١٦)، (٣-١٧):

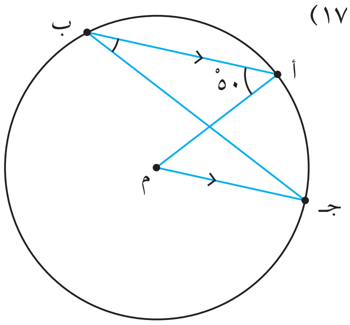



أ الشكل (٣-١٦)




ب الشكل (٣-١٧)

٢ م أ نصف قطر في دائرة مركزها م، أ ب وتر في الدائرة، النقطة جـ نقطة على الدائرة بحيث أن ب أ // م جـ كما في الشكل (٣-١٨). إذا كانت ∢ م أ ب = ٥٠ْ، أجد ∢ أ ب جـ.




الشكل (٣-١٨)

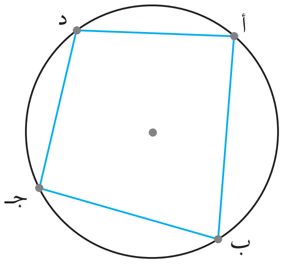
٣ ∢ أ م ب زاوية مركزية قائمة في دائرة مركزها م.
أُخذت النقطة د على الدائرة بحيث أن ∢ أ م د = ١٤٠ْ. أحسب قياس كل من زوايا المثلث أ ب د.

٤ أ ب قطر في دائرة مركزها م، جـ نقطة على الدائرة، د منتصف الوتر أ جـ، هـ منتصف الوتر ب جـ.
أثبت أن ∢ د م هـ = ٩٠ْ.

٥ دائرة مركزها م. أ ب، د جـ وتران متوازيان بحيث أن م لاتقع بينهما، فإذا تقاطع أ جـ، ب د في هـ داخل الدائرة، أبرهن أن ∢ أ هـ د = ∢ أ م د.

٦ أ ب قطر في دائرة، جـ د وتر فيها يقطع أ ب بحيث أن ∢ أ ب جـ = ٤٠ْ. أجد ∢ ب د جـ.

# ٣ - ٢ الشكل الرباعي الدائري



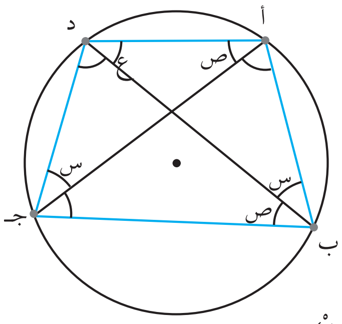
الشكل (٣- ١٩)

تعلمت سابقاً أشكالاً رباعيّة مثل المربع، والمستطيل، والمعين، ومتوازي الأضلاع، وشبه المنحرف.

وإذا وقعت جميع رؤوس الشكل الرباعي على الدائرة سمّي الشكل شكلاً رباعياً دائرياً، كما هو في الشكل (٣-١٩) المجاور.

**للشكل الرباعي الدائري الخاصيّة التالية:**

| |
|---|
| **مجموع الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري = ١٨٠° (متكاملتان)** |



الشكل (٣- ٢٠)

ولتوضيح الخاصيّة أعلاه أنظر الشكل (٣-٢٠) المقابل:

∡ س + ∡ ص + ∡ ع = ١٨٠° (زوايا المثلث أ جـ د)

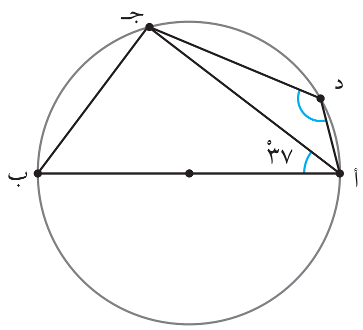
لكن ∡ س + ∡ ص ، ∡ ع زوايا متقابلة في الشكل الرباعي الدائري

∴ ∡ س + ∡ ص + ∡ ع = ١٨٠°

أي أن مجموع الزاويتين المتقابلتين ب ، د في الشكل الرباعي الدائري ١٨٠°

ويبقى مجموع الزاويتين الأخريين = ١٨٠° (لأن مجموع زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°)

ملاحظة: عكس الخاصية أعلاه صحيح أي أنه إذا كان مجموع زاويتين متقابلتين في شكل رباعي = ١٨٠° فإن هذا الشكل رباعي دائري.



الشكل (٣- ٢١)

**مثال (١):** الشكل أ ب جـ د في الشكل (٣-٢١) رباعي دائري فيه الضلع أ ب قطر في الدائرة.

أوجد ∡ أ د جـ إذا كانت ∡ جـ أ ب = ٣٧°.

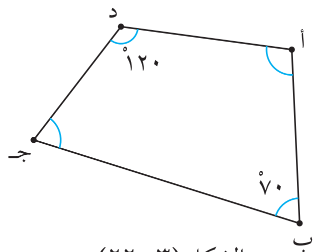
**الحل:** ∡ أ جـ ب = ٩٠° لأن أ ب قطر في الدائرة.

في المثلث أ ب جـ: ∡ أ ب جـ + ٩٠° + ٣٧° = ١٨٠°

∴ ∡ أ ب جـ = ٥٣°

∴ ∡ أ د جـ = ١٨٠° − ٥٣° = ١٢٧° (متقابلتان في رباعي دائري)

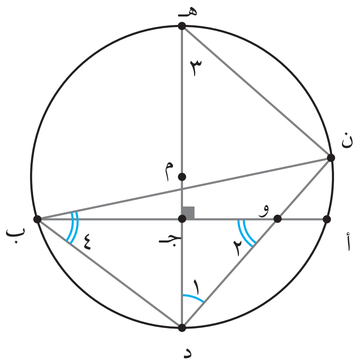
**مثال (٢):** هل الشكل أ ب جـ د المرسوم في الشكل (٣-٢٢) رباعي دائري؟ لماذا؟



الشكل (٣-٢٢)

**الحــل:** لا، لأن ∡ أ ب جـ + ∡ أ د جـ = ٧٠° + ١٢٠° = ١٩٠°
أي أنهما متقابلتان ولكنهما غير متكاملتين .

**مثال (٣):** في الشكل (٣-٢٣) أ ب وتر في دائرة مركزها م ، هـ د قطر في الدائرة وعمودي على منتصف الوتر أ ب، برهن أن الشكل ن و جـ هـ رباعي دائري .



الشكل (٣-٢٣)

**الحــل:** ∡ و جـ هـ = ٩٠°

الزاوية د ن هـ محيطية تقابل القطر د هـ

∴ ∡ د ن هـ = ٩٠°

وبما أن : ∡ و جـ هـ ، ∡ د ن هـ متقابلتان في الشكل الرباعي

ن و حـ هـ ومجموعهما ١٨٠°، ∴ الشكل ن و جـ هـ رباعي دائري .

**مثال (٤):** في الشكل (٣-٢٣) في المثال أعلاه بيّن أنّ ∡ د و ب = ∡ د ب ن

**الحــل:** في المثلث و جـ د : ∡ و جـ د = ٩٠° (لماذا؟)

∴ ∡ ٢ + ∡ ١ = ٩٠° (١)

في المثلث د ن هـ ، ∡ د ن هـ = ٩٠°

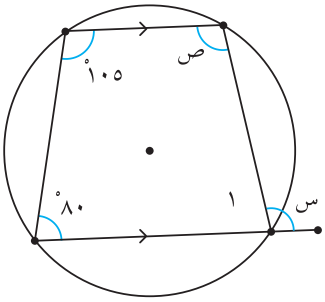
∴ ∡ ٣ + ∡ ١ = ٩٠° (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن : ∡ ٢ = ∡ ٣

لكن ∡ ٤ = ∡ ٣، محيطيتان مشتركتان في نفس القوس

∴ ∡ ٢ = ∡ ٤ أي أن ∡ د و ب = ∡ د ب ن

**مثال (٥):** اوجد قيمة س ، ص في الشكل (٣-٢٤) المجاور :



الشكل (٣- ٢٤)

**الحــل:** ∡ ص = ١٨٠° - ٨٠° = ١٠٠°

(زاويتان متقابلتان في الشكل الرباعي الدائري)

∡ ١ = ١٨٠° - ١٠٥° = ٧٥°

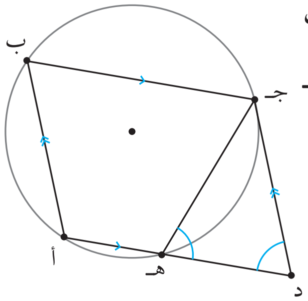
(زاويتان متقابلتان في الشكل الرباعي الدائري)

∡ س = ١٨٠° - ٧٥° = ١٠٥°

المثال أعلاه يؤكد النتيجة التالية :

| |
|---|
| **الزاوية الخارجة في الشكل الرباعي الدائري = الزاوية الداخلية المقابلة لمجاورتها** |

**مثال (٦):** في الشكل (٣-٢٥)، أ ب جـ د متوازي أضلاع، رسمت دائرة مرت بالرؤوس أ ، ب ، جـ فقطعت أ د في هـ. برهن أن جـ د = جـ هـ



الشكل (٣- ٢٥)

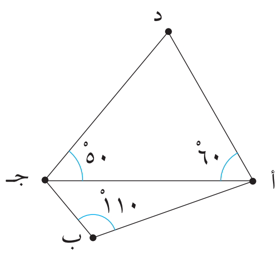
**الحــل:** نعلم أنّ ∡ د = ∡ ب (متقابلتان في متوازي الأضلاع).

) لكن ∡ جـ هـ د = ∡ ب

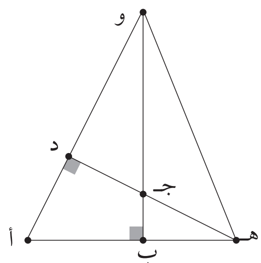
∴ ∡ د = ∡ جـ هـ د أي أنّ جـ د = جـ هـ

## تدريبات صفّية

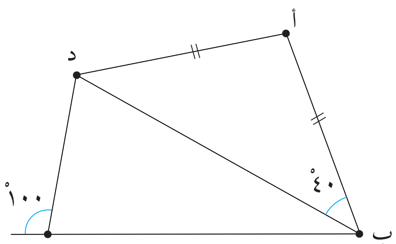
١ أتحقق أنّ أ ب جـ د في كل من الأشكال المرسومة ، شكل رباعي دائري .



الشكل (٣- ٢٦)

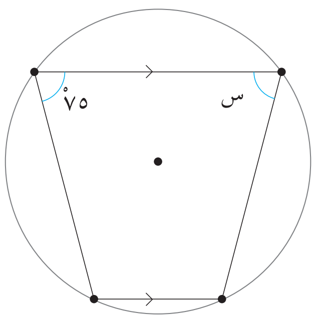


الشكل (٣- ٢٧)

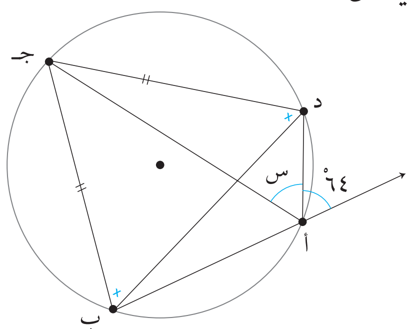


الشكل (٣-٢٨)

٢ في الشكلين (٣-٢٩)، (٣-٣٠)، أجد قيمة س في كل حالة :



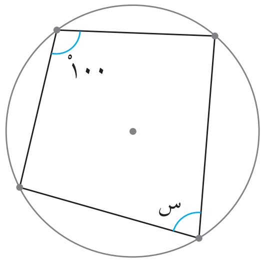
الشكل (٣- ٢٩)



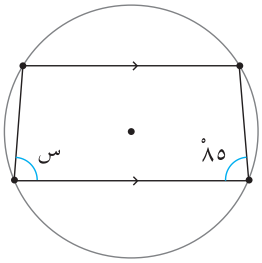
الشكل (٣- ٣٠)

## تمارين ومسائل

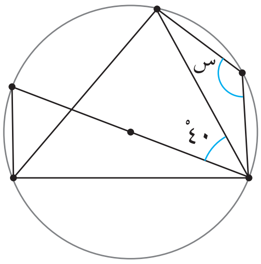
**١** أجد قيمة س في الأشكال (٣-٣١)، (٣-٣٢)، (٣-٣٣) ، (٣-٣٤) :



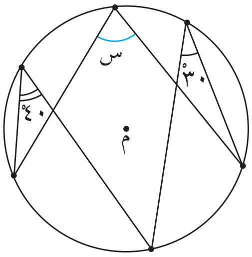
الشكل (٣- ٣١)



الشكل (٣- ٣٢)

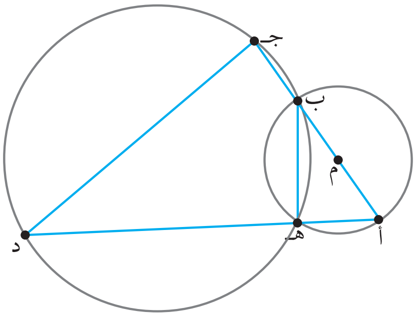


الشكل (٣- ٣٣)



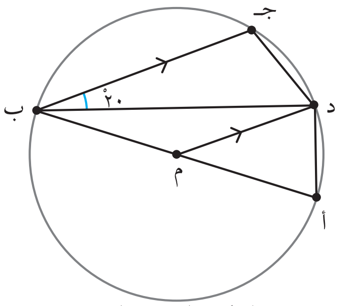
الشكل (٣-٣٤)

**٢** في الشكل (٣-٣٥) أ ب قطر في الدائرة التي مركزها م . أجد ∢ أ جـ د



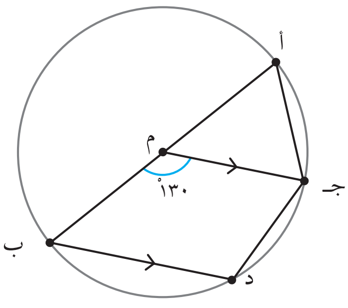
الشكل (٣- ٣٥)

**٣** في الشكل (٣-٣٦) المجاور، م مركز الدائرة، م د يوازي ب جـ ، ∢ د ب جـ = ٢٠°.
أحسب قيمة : ∢ أ م د، ∢ م أ د



الشكل (٣- ٣٦)

**٤** في الشكل (٣-٣٧) المجاور، م مركز الدائرة، م جـ يوازي ب د
أحسب قيمة : ∢ م أ جـ ، ∢ م ب د ، ∢ ب د جـ



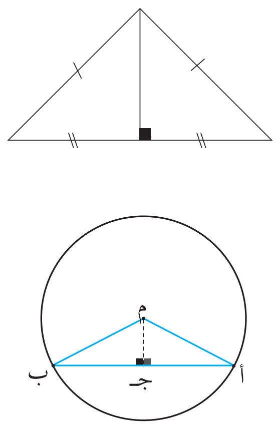
الشكل (٣- ٣٧)

# ٣ - ٣ أوتـــار الدائـــرة

تأمّل الشكل (٣–٣٨) أدناه حيث أ ب وتر في دائرة مركزها م، لاحظ أنّ المثلّث أ م ب متساوي الساقين وتنطبق عليه خصائص المثلّث المتساوي الساقين والتي سبق وأن درستها في صفوف سابقة، وهي :

١ العمود النازل من رأس المثلّث المتساوي الساقين على القاعدة ينصّف القاعدة، كما في الشكل (٣-٣٨) المجاور.

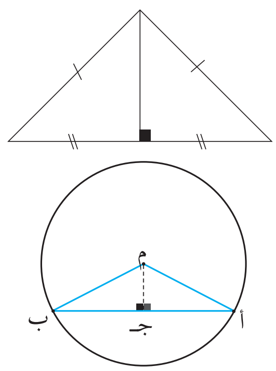
ويمكن تطبيق هذه الخاصية في الدائرة بحيث تصبح : العمود النازل من مركز الدائرة علىٰ أي وتر فيها ينصّف ذلك الوتر، كما في الشكل (٣-٣٩) المجاور.



الشكل (٣–٣٨)

٢ القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المثلث المتساوي الساقين ومنتصف القاعدة تكون عمودية على القاعدة، كما في الشكل (٣-٣٩) المجاور.

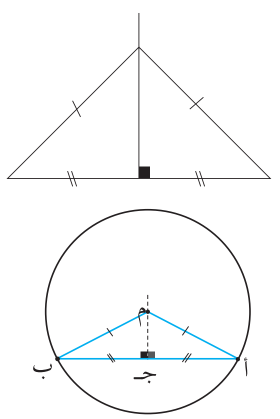
ويمكن تطبيق هذه الخاصية في الدائرة بحيث تصبح : القطعة المستقيمة الواصلة بين مركز الدائرة ومنتصف أي وتر فيها تكون عموديّة على ذلك الوتر، كما في الشكل (٣-٣٩) المجاور.



الشكل (٣–٣٩)

٣ العمود المنصف لقاعدة المثلث المتساوي الساقين يمر بالرأس، كما في الشكل (٣-٤٠) المجاور.

ويمكن تطبيق هذه الخاصية في الدائرة بحيث تصبح : العمود المنصّف لأي وتر في دائرة يمر بالمركز، كما في الشكل (٣-٤٠) المجاور.



الشكل (٣–٤٠)

**مثـــال(١):** في الشكل (٣-٤١)، أ ب وتر في دائرة مركزها م ونصف قطرها يساوي ٥ وحدات فإذا كان طول الوتر أ ب يساوي ٦ وحدات، فأوجد بعد الوتر عن المركز م .

**الحـــل:** لتكن جـ موقع العمود النازل من م على أ ب، جـ هي منتصف أ ب (لماذا؟)

لذلك فإن جـ ب = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ وحدات.

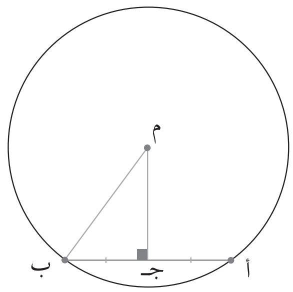
وبتطبيق نظرية فيثاغورس فإن :

(م ب)$^{٢}$ = (م جـ)$^{٢}$ + (جـ ب)$^{٢}$

٢٥ = (م جـ)$^{٢}$ + ٩

ومن ذلك نجد أن (م جـ)$^{٢}$ = ١٦

∴ م جـ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ وحدات



الشكل (٣-٤١)

**مثـــال(٢):** في الشكل (٣-٤٢)، أ ب ، جـ د وتران متوازيان في دائرة نصف قطرها ١٣ سم. أ ب = ٢٤ سم، جـ د = ١٠ سم. جد البعد بين هذين الوترين علماً بأن مركز الدائرة م يقع بين الوترين.

**الحـــل:** ننزل من م عموداً م هـ على جـ د، ونمدّه من جهة م حتى يقطع أ ب في و.

بما أن أ ب يوازي جـ د فإن م و عمودي على أ ب .

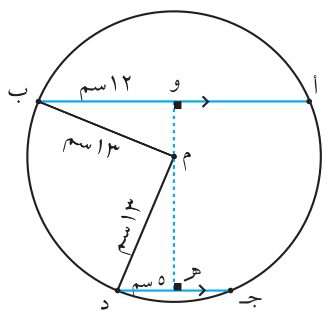
المثلثان م و ب ، م هـ د قائما الزاوية في و، هـ مع الترتيب.

وبتطبيق نظرية فيثاغورس فإن :

(م و)$^{٢}$ + (و ب)$^{٢}$ = (م ب)$^{٢}$

∴ (م و)$^{٢}$ + ١٤٤ = ١٦٩

∴ (م و)$^{٢}$ = ٢٥ .



الشكل (٣-٤٢)

ومن ذلك نجد أن م و = ٥سم . وبنفس الطريقة نجد أن م هـ = ١٢ سم .

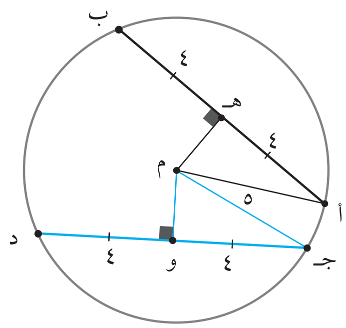
البعد بين الوترين المتوازيين هو و هـ .

لكن و هـ = م و + م هـ

= ٥ + ١٢ = ١٧ سم .

**مثـال(٤):** أ ب ، جـ د وتران متساويان، طول كل منهما ٨ وحدات، في دائرة مركزها م ونصف قطرها ٥ وحدات. أوجد بُعد كل منهما عن مركز الدائرة.

**الحـل:** لاحظ الشكل (٣-٤٣) المجاور حيث م هـ عمودي على أ ب وبالتالي فهو ينصّفه وكذلك م و عمودي على جـ د فهو ينصّفه.



الشكل (٣-٤٣)

بتطبيق نظريّة فيثاغورس على المثلث أ م هـ فإنّ:

$$(أم)^2 = (أهـ)^2 + (هـم)^2$$

$$٥^2 = ٤^2 + (هـم)^2$$

$$٢٥ = ١٦ + (هـم)^2$$

$$٢٥ - ١٦ = (هـم)^2$$

$$٩ = (هـم)^2$$

$$٣ = هـم$$

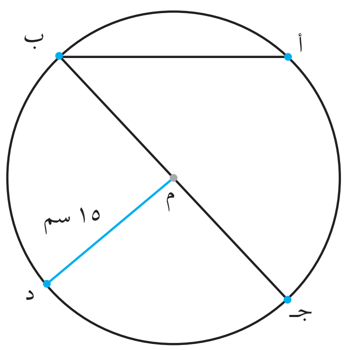
وبالمثل عند تطبيق نظريّة فيثاغورس على المثلث هـ م و ينتج أنّ و م = ٣

المثال أعلاه يؤكّد النتيجة التالية: **إذا تساوى وتران في دائرة فإنّ بعديهما عن مركز الدائرة متساويان**

## تدريـــب

أ ب، جـ د وتران في دائرة بعداهما عن مركز الدائرة ٦ سم، ٨سم على الترتيب. إذا كان أ ب = ١٦ سم، فما طول جـ د ؟

## تدريبات صفّية



الشكل (٣- ٤٤)

١ في الشكل(٣- ٤٤)، م مركز الدائرة:

أ أُحدّد أي نصف قطر في هذه الدائرة.

ب ما طول نصف قطر الدائرة ؟

جـ أُسمّي وترين في الدائرة.

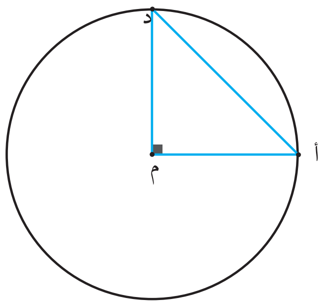
د ما طول أطول وتر في الدائرة؟

٢ أجد طول الوتر المرسوم في دائرة قطرها ٢٦ سم وطول العمود النازل من المركز على هذا الوتر يساوي ١٢ سم.

٣ أ ب ، جـ د وتران في دائرة مركزها م، أ ب = ١٢ سم، هـ، ع منتصفا أ ب ، جـ د، فإذا كان م هـ = م ع، أجد طول جـ د.

## تمارين ومسائل

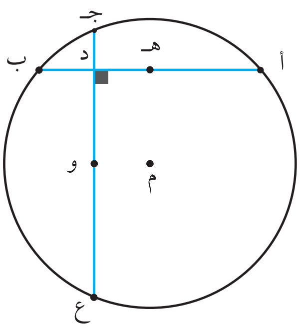
**١** أ ب وتر في دائرة مركزها م . جـ منتصف أ ب . إذا كان م جـ = ٥سم ونصف قطر الدائرة = ١٣ سم ، أجد طول أ ب .



الشكل (٣-٤٥)

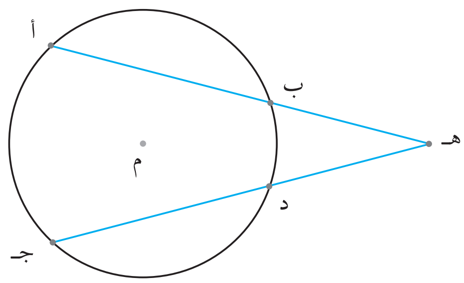
**٢** م أ ، م د نصفا قطرين متعامدان في دائرة مركزها م ، إذا كان طول الوتر أ د = ١٠ سم ، فما طول نصف قطر الدائرة؟ أنظر الشكل(٣-٤٥) .

**٣** أ ب ، جـ د وتران غير متوازيين في دائرة مركزها م . طول أ ب يساوي ١٠ سم وبعده عن م يساوي ١٢سم . طول جـ د يساوي ٢٤ سم ، فما بعده عن مركز الدائرة؟



الشكل (٣- ٤٦)

**٤** اذا كانت د هي نقطة تقاطع الوترين المتعامدين أ ب ، جـ ع في دائرة مركزها م وكانت هـ منتصف أ ب وكانت و منتصف جـ ع . أبرهن أن الشكل م هـ د و مستطيل .
انظر الشكل(٣-٤٦)



الشكل (٣- ٤٧)

**٥** في الشكل (٣-٤٧)، أ ب = جـ د .
أبرهن أن أ هـ = جـ هـ .

**٥** لديك دائرة غير معروفة المركز
بين طريقة تعيين المركز باستخدام الفرجار والمسطرة غير المدرجة.

## الأوتـــــار المتقاطعة:

للأوتار المتقاطعة داخل الدائرة علاقات تربط بينها ، وفي هذا الدرس ستتعرف على هذه العلاقات

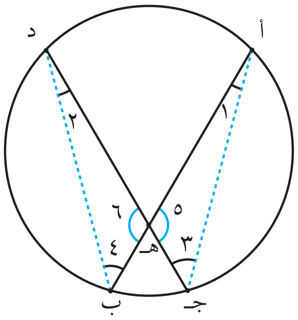
### نظريـــة:

**إذا تقاطع وتران داخل دائرة ، فإن حاصل ضرب جزئي الوتر الأول يساوي حاصل ضرب جزئي الوتر الثاني.**

المعطيات : أ ب ، جـ د وتران متقاطعان في النقطة هـ داخل الدائرة .

المطلوب : اثبات أن : هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

البرهان : نصل أ جـ ، ب د . أنظر الشكل (٣-٤٨)



الشكل (٣- ٤٨)

في المثلثين أ جـ هـ ، د ب هـ يكون :

∡ ١ = ∡ ٢ محيطيتان مشتركتان في نفس القوس

∡ ٣ = ∡ ٤ محيطيتان مشتركتان في نفس القوس

∡ ٥ = ∡ ٦ بالتقابل بالرأس .

∴ يتشابه المثلثان وينتج أن : $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{هـ د}}{\text{هـ ب}}$

بالضرب التبادلي نحصل على هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د وهو المطلوب □

### مثـــال:

في الشكل (٣ – ٤٩) ، جـ هـ = ٥ سم ، جـ ب = ١٩ سم ، أ هـ = ٧ سم ، أوجد طول أ د .

### الحــل:

هـ ب = جـ ب – جـ هـ

= ١٩ – ٥ = ١٤

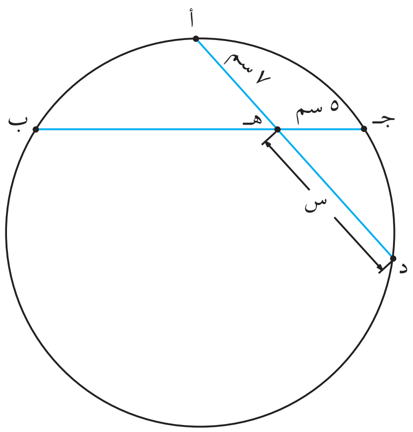
نفرض هـ د = س

∴ أ هـ × هـ د = جـ هـ × هـ ب

٧ × س = ٥ × ١٤

∴ س = ١٠

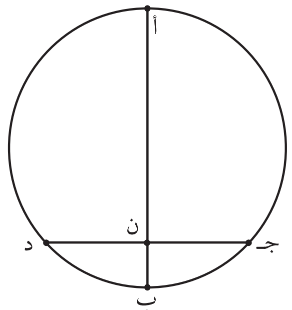
أ د = أ هـ + هـ د = ٧ + ١٠ = ١٧ سم



الشكل (٣- ٤٩)

## تدريبات صفّية

١ أ ب ، جـ د وتران متعامدان في دائرة مركزها م ومتقاطعان داخل الدائرة في هـ . إذا كان أ هـ = ٨ ، هـ ب = ٣ ، أ جـ = ١٠ . أجد جـ د .



الشكل (٣- ٥٠)

٢ في الشكل (٣-٥٠)، أ ب قطر عمودي على الوتر جـ د .
إذا علمت أنّ ن ب = ٢ سم، جـ د = ١٢ سم .
أجد نصف قطر الدائرة .

## تمارين ومسائل

١ أ ب قطر في دائرة، جـ د وتر عمودي على أ ب في هـ . إذا كان أ ب = ١٣ سم، أ هـ = ٤ سم، أجد جـ د .

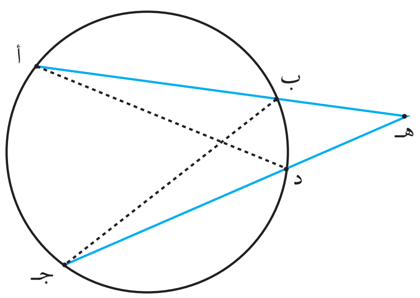
٢ وتران أ ب ، جـ د متقاطعان داخل دائرة بحيث ينصف كل منهما الآخر . أبرهن أن أ ب = جـ د .

٣ أبرهن النظرية السابقة إذا تقاطع امتداد الوترين خارج الدائرة . أي أبرهن أنه إذا كان أ ب ، جـ د وترين في دائرة، وتقاطع امتدادهما في النقطة هـ خارج الدائرة، فإن :

أ هـ × هـ ب = جـ هـ × هـ د

انظر الشكل (٣-٥١) .

*( إرشاد : أستخدم تشابه المثلثين أ د هـ ، جـ ب هـ)*



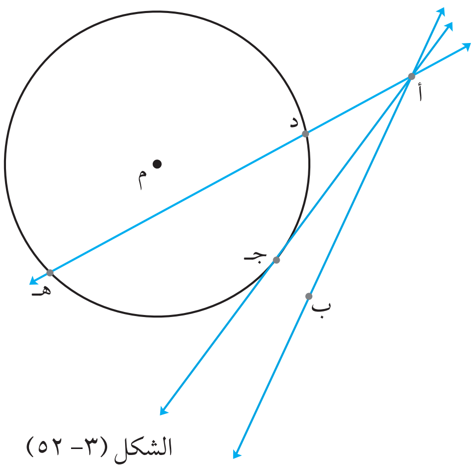
الشكل (٣- ٥١)

٤ أ ب ، جـ د وتران في دائرة مركزها م . مُدّ ب أ من جهة أ، ثم مُدّ د جـ من جهة جـ فتقاطعا خارج الدائرة في النقطة هـ . إذا كان أ ب = ١٣ سم، جـ د = ٧سم ، هـ جـ = ٣سم . أجد :

أ) طول هـ أ

ب) طول ب جـ ، حيث أ د = ١٢ . *(إرشاد : استخدم تشابه المثلثات)*

## ٣ - ٣ مماس الدائرة



الشكل (٣- ٥٢)

إذا كانت أ نقطة خارج دائرة مركزها م، ورسم مستقيم يمر بالنقطة أ فان هنالك ثلاث حالات لهذا المستقيم بالنسبة لعلاقته مع الدائرة:

**الحالة الأولى:**

المستقيم لا يقطع الدائرة في أي نقطة من نقاطها، مثل المستقيم أ ب في الشكل(٣-٥٢).

**الحالة الثانية :**

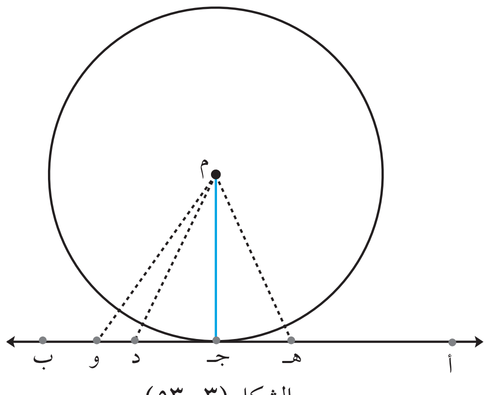
المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين مثل د، هـ، ويسمى المستقيم في هذه الحالة قاطعاً للدائرة. مثل المستقيم أهـ.

**الحالة الثالثة:**

المستقيم يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط مثل جـ، ولا يقطعها في أية نقطة أخرى، وفي هذه الحالة **يكون المستقيم مماساً للدائرة**، مثل المستقيم أ جـ. أنظر الشكل (٣-٥٢) أيضاً.

يتمتع المماس للدائرة بخاصية هامة هي:

**المماس لدائرة يكون عمودياً على نصف القطر عند نقطة التماس.**



الشكل (٣- ٥٣)

ولتوضيح هذه الخاصيّة، أنظر الشكل (٣-٥٣) حيث أب مماس للدائرة في النقطة جـ.

م جـ نصف قطر في الدائرة.

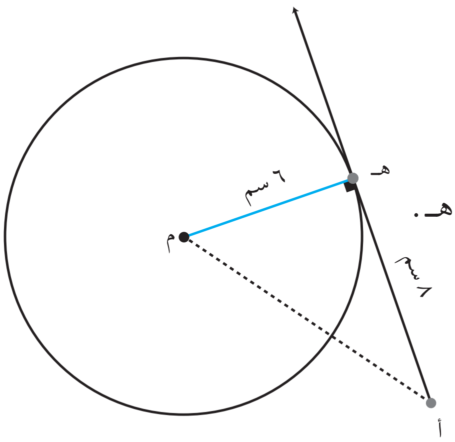
بمقارنة أطوال القطع المستقيمة م هـ، م جـ، م د، م و، نجد أنّ م جـ هو أقصر هذه القطع لأنّ النقاط هـ د، و، تقع خارج الدائرة.

∴ م جـ عمودي على الخط المستقيم أ ب لأنّ م جـ هي أقصر المسافات بين م والمستقيم أ ب.

### نتيجة:

**لرسم مماس دائرة عند نقطة عليها مثل أ فاننا نحتاج لإقامة عمود على نصف القطر م أ، حيث م مركز الدائرة. ووفق الخاصيّة السابقة يكون هذا العمود مماساً للدائرة عند أ.**

**مثـــال:** في الشكل (٣-٥٤)، دائرة مركزها م ونصف قطرها ٦ سم. أ نقطة خارج الدائرة. رسم من أ مماس للدائرة أ هـ بحيث أن أ هـ = ٨ سم.
جد طول أ م.



الشكل (٣-٥٤)

**الحـل:** ∵ أ هـ مماس، فإنه عمودي على نصف القطر م هـ.
∴ المثلث م هـ أ قائم الزاوية في هـ.
وبتطبيق نظرية فيتاغورس فان:

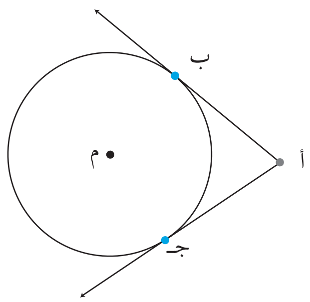
$(أم)^٢ = (أهـ)^٢ + (مهـ)^٢$

$(أم)^٢ = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠$

أم = ١٠سم

## تدريـــب

في الشكل (٣-٥٥)، أ ب، أ جـ مماسان للدائرة، أرسم محور تماثل من أ، ما صورة ب في محور التماثل.
ماذا تلاحظ بالنسبة لطول أ ب، أ جـ؟ هل يتّفق جوابك مع النظرية التالية:



الشكل (٣-٥٥)

**نظريـــة:**

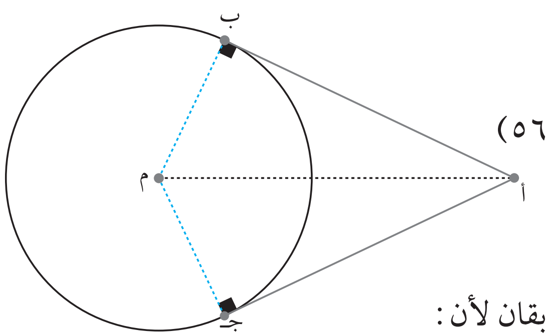
**المماسان المرسومان لدائرة من نقطة خارجها متساويان.**

المعطيات: دائرة مركزها م.
أ نقطة خارج الدائرة.
أ ب، أ جـ مماسان. انظر الشكل (٣-٥٦)

المطلوب: إثبات أن أ ب = أ جـ.

العمـــل: نصل م ب، م جـ، م أ.

البرهـان: المثلثان م ب أ، م جـ أ القائما الزاوية متطابقان لأن:
أ م مشترك، ب م = م جـ (أنصاف أقطار في الدائرة)
ينطبق المثلثان بِـ وتر وضلع وقائمة وينتج أنّ أ ب = أ جـ □



الشكل (٣-٥٦)

## تدريبات صفّية

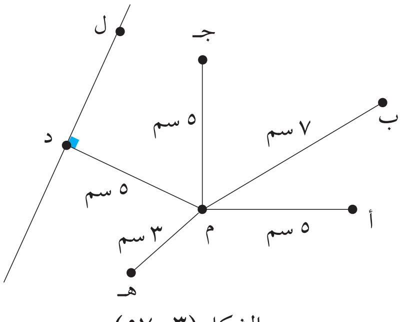
١ بالاستعانة بالشكل (٣-٥٧)، أذكر صحة أو خطأ العبارات التالية مع ذكر السبب:

أ ) النقطة هـ تقع خارج الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها ٥سم.

ب) النقطة ب تقع خارج الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها ٥سم.

جـ) النقاط أ، جـ، د تقع على الدائرة التي نصف قطرها ٥سم ومركزها م.

د ) الخط ل د مماس للدائرة التي مركزها م ونصف قطرها ٥سم.



الشكل (٣-٥٧)

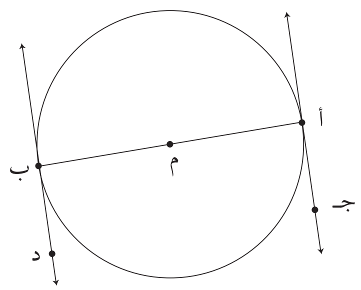
٢ رُسم من النقطة هـ الواقعة خارج الدائرة التي مركزها م مماسان للدائرة عند أ، ب فإذا كان قياس ∢ أ م ب = ١٠٠°، فما قياس ∢ أ هـ ب؟

## تمارين ومسائل

١ دائرة مركزها م ، م ن نصف قطر في الدائرة وطوله ٣ سم، المستقيم ع ن مماس للدائرة، وطول القطعة ع ن = ٤ سم. أجد طول م ع.

٢ النقطة هـ تقع خارج دائرة مركزها م. رسم من هـ مماسان للدائرة عند النقطتين أ، ب.
أبيّن أن: ∢ أ م ب + ∢ أ هـ ب = ١٨٠°.

٣ في الشكل (٣-٥٨)، دائرة مركزها م، أ ب قطر في الدائرة. رُسم للدائرة المماس أ جـ عند أ، والمماس ب د عند ب.
أبيّن أن: أ جـ // ب د



الشكل (٣-٥٨)

٤ أ ب ، جـ د قطران متعامدان في دائرة مركزها م. رسم مماسان للدائرة عند أ ، جـ فتقاطعا في هـ.

أ ما قياس ∢ م أ هـ، ∢ م جـ هـ؟

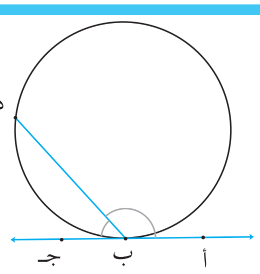
ب هل زوايا الشكل أ م جـ هـ قوائم؟

جـ ما اسم الشكل أ م جـ هـ؟

## الزاوية المماسيــة:

**الزاوية المماسية هي الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة وأي وتر في الدائرة مار بنقطة التماس .**

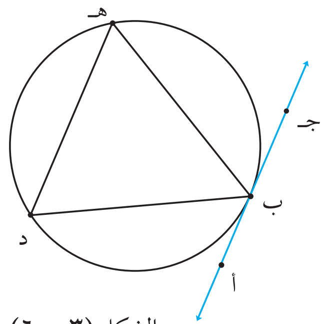
في الشكل (٤– ٥٩) أ جـ مماس للدائرة في ب، ب د وتر . الزاويتان أ ب د، جـ ب د زاويتان مماسيتان .



الشكل (٣– ٥٩)

## تدريــــب

في الشكل (٣–٦٠)، أ جـ مماس للدائرة عند ب . باستخدام المنقلة :



الشكل (٣– ٦٠)

(١) جد قياس ∡ أ ب د، ∡ ب هـ د .

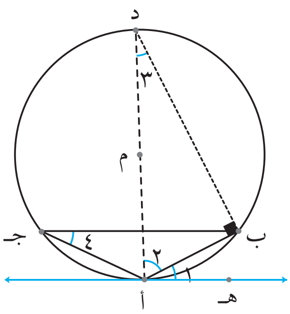
(٢) جد قياس ∡ جـ ب هـ، ∡ ب د هـ .

ماذا تلاحظ؟ قارن بين استنتاجاتك والنظرية التالية :

## نظريـــة:

**الزاوية المماسية تساوي الزاوية المحيطية المرسومة على الوتر في الجهة الأخرى.**

المعطيات : أ ب وترفي دائرة مركزها م، هـ أ مماس للدائرة عند أ . الزاوية هـ أ ب زواية مماسية، الزاوية ب جـ أ محيطية في الجهة الأخرى من الوتر أ ب . انظر الشكل (٣–٦١)



الشكل (٣– ٦١)

المطلوب : إثبات أن ∡ هـ أ ب = ∡ ب جـ أ .

العمــل : نصل أ م ونمده على استقامته حتى يقطع الدائرة في د . ثم نصل د ب

البرهـان : نسمي الزوايا كما في الشكل (٣– ٦١) لسهولة الكتابة .

الزاوية أ ب د = ٩٠° لأنها محيطية تقابل القطر أ د .

∡ ١ + ∡ ٢ = ٩٠° لأن المماس يعامد نصف القطر عند أ .

∡ ٣ + ∡ ٢ = ٩٠°، لأن ∡ ٢ ، ∡ ٣ مع ∡ د ب أ تكون زوايا مثلث .

∴ ∡ ١ = ∡ ٣ .

لكن ∡ ٣ = ∡ ٤ لأنهما محيطيتان مشتركتان في نفس القوس .

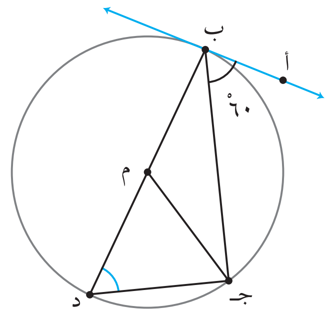
∴ ∡ ١ = ∡ ٤ وهو المطلوب . □

## مثال (١):

في الشكل (٣-٦٢) م مركز الدائرة، أ ب مماس عند ب .

ب جـ وتر في الدائرة، ∡ أ ب جـ = ٦٠°

أوجد ∡ ب د جـ ، ∡ ب م جـ



الشكل (٣-٦٢)

## الحــل:

∡ ب د جـ = ∡ أ ب جـ . . .(من النظرية)

∡ ب د جـ = ٦٠°

∡ ب م جـ = ٢ ( ∡ ب د جـ) . . .(مركزية مشتركة مع المحيطيّة في القوس)

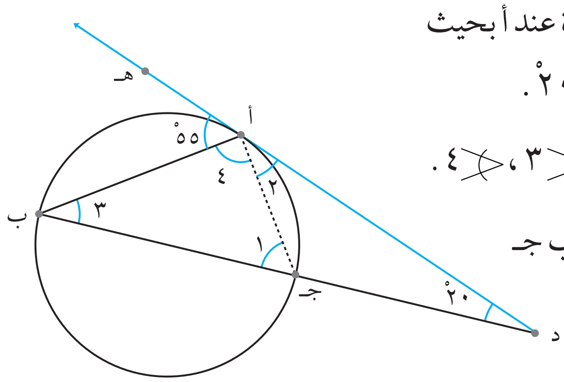
∴ ∡ ب م جـ = ٢ (٦٠) = ١٢٠°

## مثال (٢):

في الشكل (٣-٦٣) هـ د مماس للدائرة عند أ بحيث أن: ∡ هـ أ ب = ٥٥°، ∡ أ د ب = ٢٠° .

(١) أوجد قياس كل من ∡ ١، ∡ ٢، ∡ ٣، ∡ ٤ .

(٢) ماذا تستنتج بالنسبة للقطعة المستقيمة ب جـ



الشكل (٣- ٦٣)

## الحــل:

(١) نصل أ جـ .

∡ ١ = ∡ هـ أ ب = ٥٥° حسب النظرية السابقة .

∡ ١ = ∡ ٢ + ∡ أ د جـ لأنها خارجة بالنسبة للمثلث أ جـ د .

∴ ٥٥° = ∡ ٢ + ٢٠° . ومن ذلك نجد ∡ ٢ = ٥٥° - ٢٠° = ٣٥° .

∡ ٢ = ∡ ٣ (من النظرية السابقة)

∴ ∡ ٣ = ٣٥° .

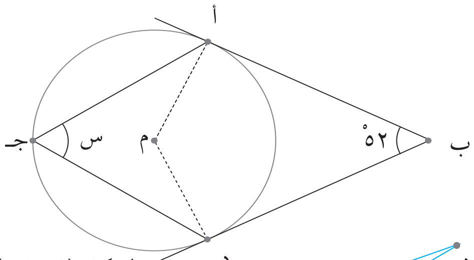
مجموع قياسي ∡ ١، ∡ ٣ = ٥٥° + ٣٥° = ٩٠°

∴ ∡ ٤ = ١٨٠° - ٩٠° = ٩٠°

(٢) بما أنّ ∡ ٤ زاوية محيطيّة قياسها ٩٠° فهي تقابل قطراً، أي أنّ ب جـ قطر في الدائرة

## تدريبات صفّية

١ في الشكل (٣-٦٤) ب أ ، ب د مماسان للدائرة عند أ ، د . أجد قيمة س .

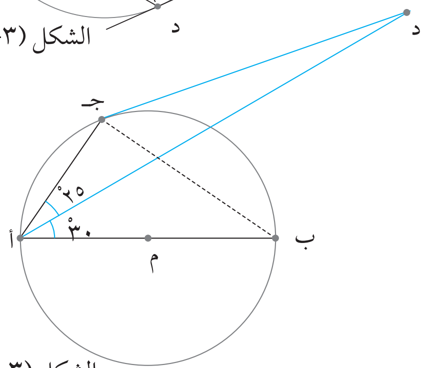


الشكل (٣- ٦٤)

٢ في الشكل (٣-٦٥) أ ب قطر في الدائرة التي مركزها م، د جـ مماس عند جـ.

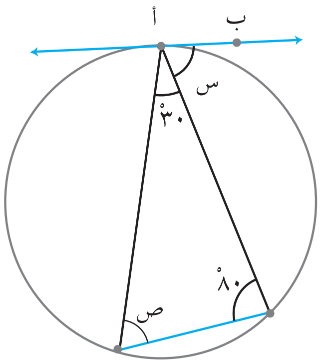
إذا كانت ∢ د أ ب = ٣٠ْ، ∢ د أ جـ = ٢٥ْ .

أجد ∢ أ د جـ.

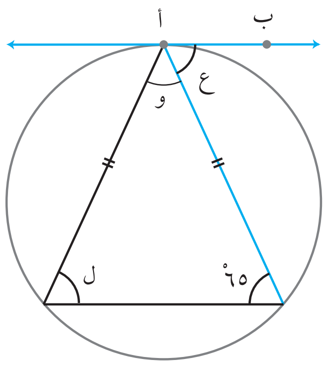


الشكل (٣- ٦٥)

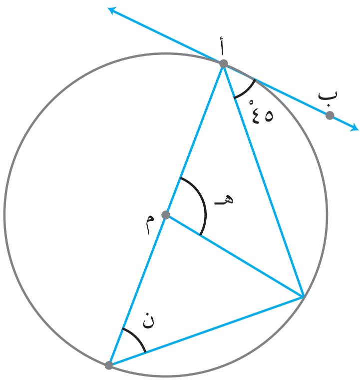
٣ في الأشكال الآتية (٣-٦٦)، (٣-٦٧) ، (٣-٦٨)، أ ب مماس للدائرة . أجد قياس جميع الزوايا المشار إليها بالرموز في كل حالة، علماً بأنّ النقطة م تدل على مركز الدائرة .



الشكل (٣- ٦٦)

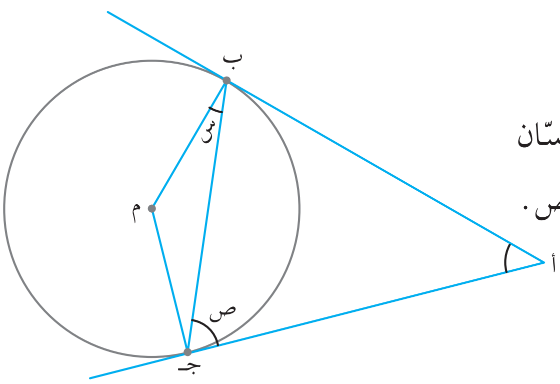


الشكل (٣- ٦٧)



الشكل (٣- ٦٨)

٤ في الشكل (٣-٦٩) المجاور، أ ب ، أ جـ مماسّان لدائرة مركزها م، ∢ أ = ٤٤ْ . أحسب قيمة س، ص .



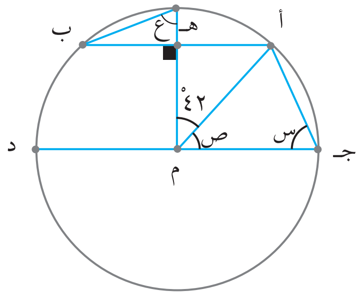
الشكل (٣- ٦٩)

## تمارين ومسائل

**١** في الشكل (٣-٧٠) المجاور أ ب يوازي جـ د،

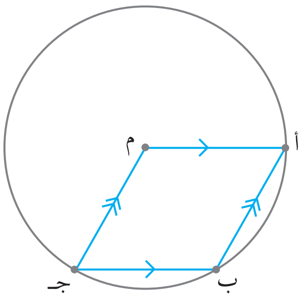
∢ أ هـ م قائمة ، ∢ أ م هـ = ٤٢° .

احسب قيمة س ، ص ، ع .



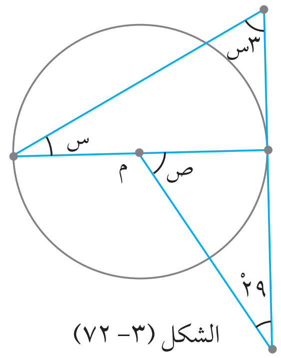

الشكل (٣-٧٠)

**٢** في الشكل (٣-٧١) المجاور أ ب جـ م متوازي أضلاع ، م مركز الدائرة . أجد قياس زوايا متوازي الأضلاع .

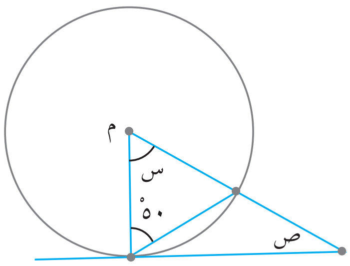



الشكل (٣-٧١)

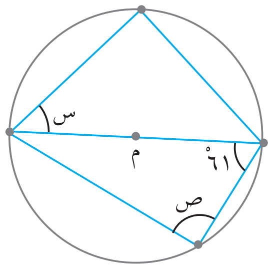
**٣** في كل من الاشكال (٣-٧٢) ، (٣-٧٣)، (٣-٧٤)، (٣-٧٥) التالية م مركز الدائرة . أجد قياس الزوايا المشار إليها بالرموز .



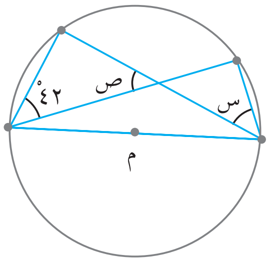

الشكل (٣-٧٢)




الشكل (٣-٧٣)




الشكل (٣-٧٤)




الشكل (٣-٧٥)

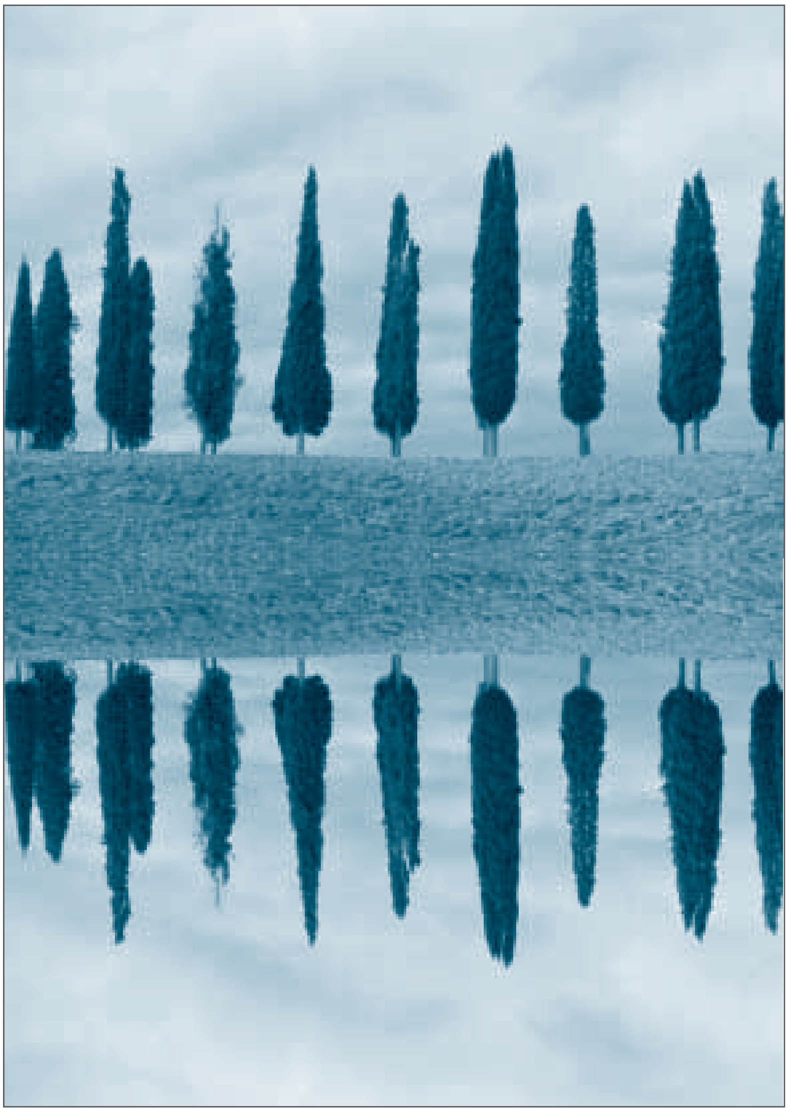
**٤** أ ب، أ جـ وتران في دائرة بحيث يقع مركز الدائرة م بينهما . النقطة د منتصف أ ب والنقطة هـ منتصف أ جـ . أثبت أن الشكل أ هـ م د رباعي دائري .

**٥** أ ب قطر في دائرة نصف قطرها ٦ سم . جـ د وتر في الدائرة . مُدّ ب أ من جهة أ ثم مُدّ د جـ من جهة جـ، فتقاطعا في هـ . إذا كان هـ أ = ٣سم ، هـ جـ = ٥سم . أجد جـ د .

الوحدة

# ٤

# التحويلات الهندسية



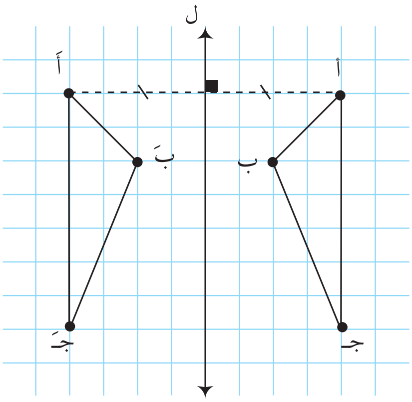
**مقدمة:**

سوف ندرس في هذه الوحدة التحويلات الهندسيّة، ومن أهم هذه التحويلات الهندسيّة: الانعكاس، الانسحاب، الدوران، التمدد.

## ٤ - ١ الانعكاس

عندما تقف أمام المرآة فإنك ترى صورتك فيها، كما أنّك عندما تنظر إلى سطح بحيرة فإنك ترى صورة الأشجار مقلوبة في البحيرة، إن ما تشاهده هو انعكاس على خط مستقيم يمثل سطح المرآة في الحالة الأولى وسطح البحيرة الملامس للشاطئ في الحالة الثانية كما في الشكل المقابل.

### نشاط (١)




الشكل (٤ - ١)

في الشكل (٤-١)، أ ب جـ مثلث، ل محور الانعكاس أَ، بَ، جـَ هي انعكاس النقاط أ، ب، جـ في المحور ل. يمكن تحديد أَ، بَ، جـَ وذلك بثني الورقة حول ل وتحديد موقع أ، ب، جـ على الجهة الأخرى من الورقة وهي أَ، بَ، جـَ.

المثلث أَ بَ جـَ هو صورة المثلث أ ب جـ، في الانعكاس في المحور ل.

لاحظ العلاقة بين النقطة أ وصورتها أَ، كما هو مبين في الشكل

**يمكنك الاستنتاج أن:**

١ القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطة وصورتها عموديّة على محور الانعكاس.

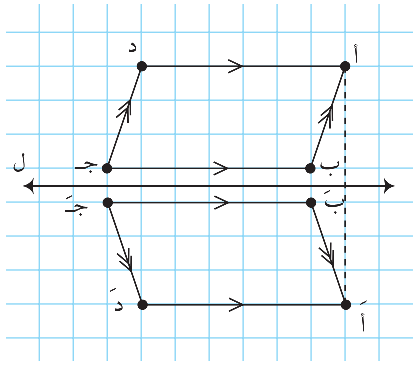
٢ النقطة وصورتها لهما نفس البعد عن محور الانعكاس.

## مثـــال(١)

في الشكل (٤-٢) أ ب جـ د متوازي أضلاع .

١) أرسم صورة أ ب جـ د بالانعكاس في المحور ل

٢) ما نوع الشكل أَ بَ جـَ دَ ؟



الشكل (٤-٢)

## الحـــل:

لايجاد صورة النقطة أ نرسم عموداً من أ على محور الانعكاس ونمدّه بقدر طوله إلى نقطة تكون هي موقع الصورة أَ ، وهكذا بالنسبة لباقي النقاط.

يمثّل الشكل (٤-٢) صورة أ ب جـ د وهو أَ بَ جـَ دَ

الشكل أَ بَ جـَ دَ هو متوازي أضلاع .

**ملاحظة:** الشكل الأصلي وصورته في أي انعكاس شكلان متطابقان.

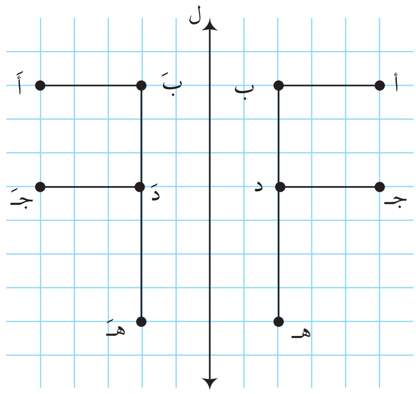
## مثـــال(٢)

في الشكل (٤-٣)، النقاط أَ ، بَ ، جـَ، دَ، هـَ هي انعكاس للنقاط أ ، ب ، جـ ، د، هـ في المحور ل .

ماذا تلاحظ بالنسبة للشكلين الهندسيين؟

هل توصلت إلى أن :

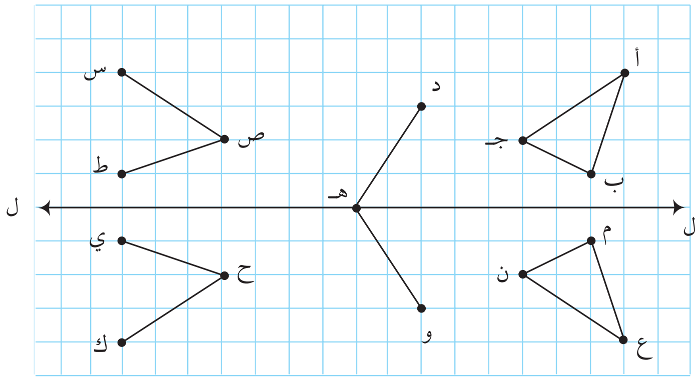
| الانعكاس يقلب الوضع للأشكال الهندسية |
|---|



الشكل (٤-٣)

## تمارين ومسائل

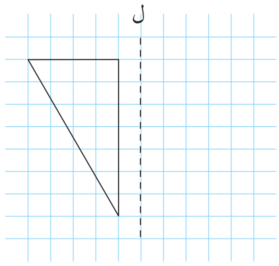
**١** من الشكل (٤-٤)، أذكر صور كل مما يلي بالانعكاس في المحور ل .



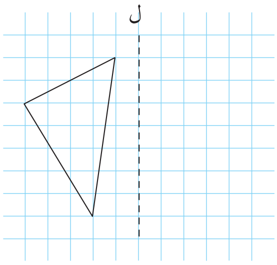
الشكل (٤-٤)

(١) أ  (٢) هـ
(٣) ص  (٤) أب
(٥) ص ط  (٦) Δ أ ب حـ
(٧) ∡ س ص ط
(٨) ∡ أ جـ ب

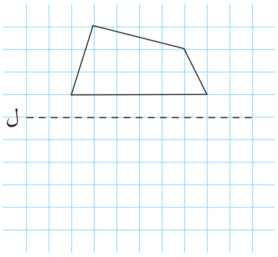
**٢** أرسم صورة كل من الأشكال الآتية بالانعكاس في المحور ل :



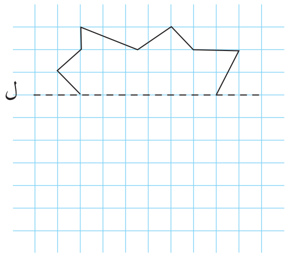
الشكل (٤-٥)



الشكل (٤-٦)

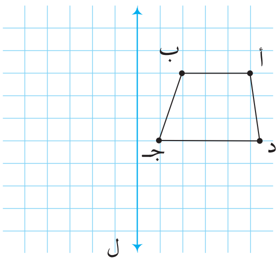


الشكل (٤-٧)



الشكل (٤-٨)

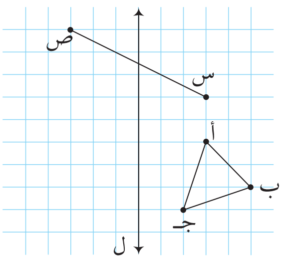
**٣** في الشكل (٤-٩) : أرسم انعكاس شبه المنحرف أ ب جـ د في المحور ل .



الشكل (٤-٩)

**٤** في الشكل (٤-١٠)، أرسم صورة كل مما يأتي بالانعكاس في محور ل :

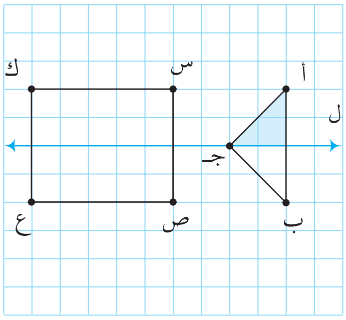
(١) س ص
(٢) Δ أ ب جـ



الشكل (٤-١٠)

## ⋆ حالة خاصّة للانعكاس:

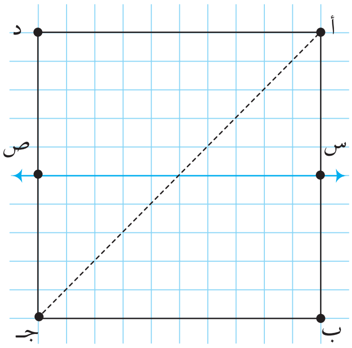
### محور التماثل :



الشكل (٤-١١)

في الشكل (٤-١١)، انعكاس المثلث أ ب جـ في المحور ل هو ب أ جـ.
انعكاس المستطيل س ص ع ك في المحور ل هو ص س ك ع.
نقول أن المثلث والمستطيل متماثلان بالنسبة للمحور ل وأن المحور ل هو محور تماثل.

## نشـــــاط



الشكل (٤-١٢)

في الشكل (٤-١٢) : أ ب جـ د مربع :

- هل أ جـ محور تماثل للمربع؟
- هل س ص محور تماثل للمربع؟
- هل يوجد محاور تماثل أخرى للمربع؟ ما هي؟

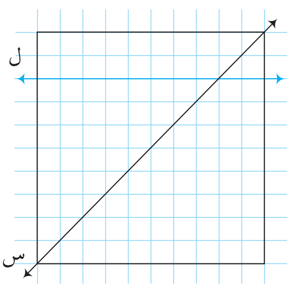
## تدريـب صفّي

١ كم محور تماثل للمثلث المتساوي الأضلاع ؟ ما هي؟

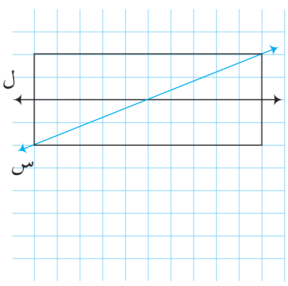
٢ كم محور تماثل للمستطيل؟ ما هي؟

## تمارين ومسائل

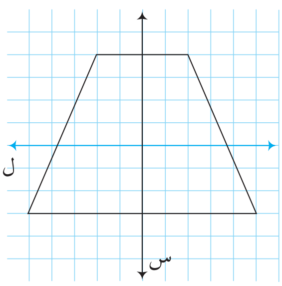
١ أي الخطين المستقيمين س أم ل يشكل محور التماثل لكل من الأشكال الآتية :



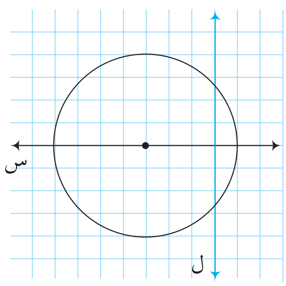
الشكل (٤-١٣)



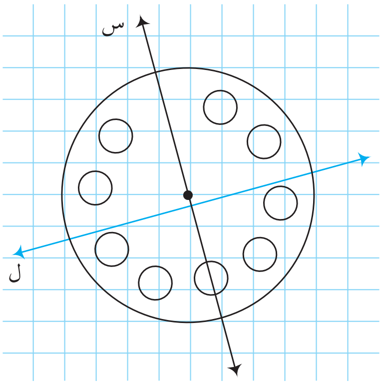
الشكل (٤-١٤)



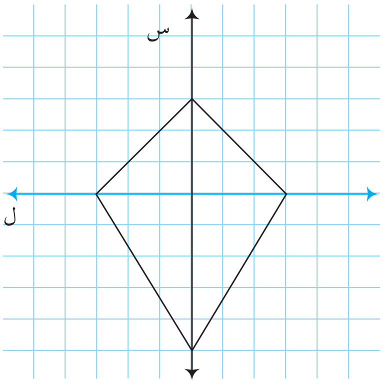
الشكل (٤-١٥)



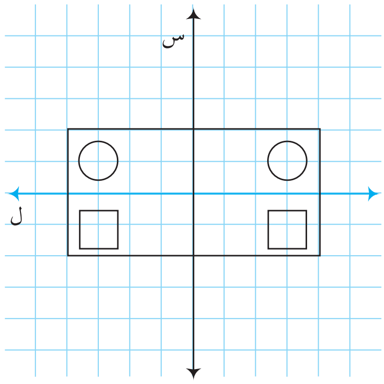
الشكل (٤-١٦)




الشكل (٤-١٩)

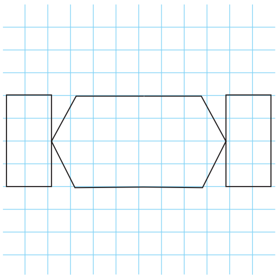



الشكل (٤-١٨)

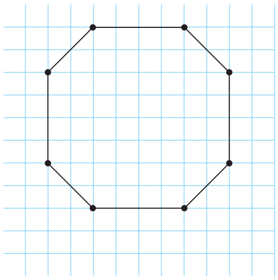



الشكل (٤-١٧)

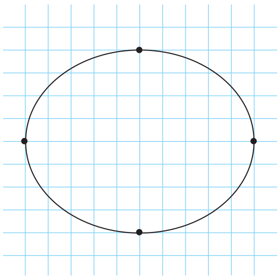
**٣** أرسم جميع محاور التماثل للأشكال الآتية:



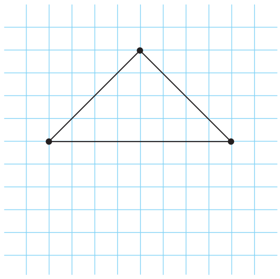
الشكل (٤-٢٣)



الشكل (٤-٢٢)

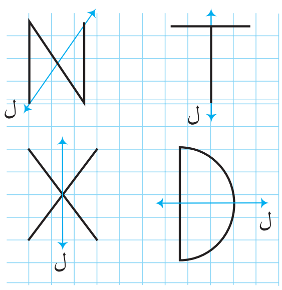


الشكل (٤-٢١)



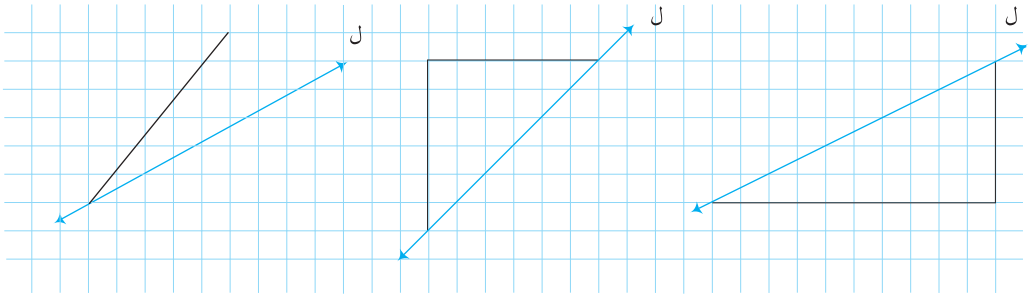
الشكل (٤-٢٠)

**٤** أحدد فيما إذا كان الخط المستقيم ل يشكل محور تماثل للحروف في الشكل (٤-٢٤):




الشكل (٤-٢٤)

**٥** في الشكل (٤-٢٥)، أكمل رسم الأشكال التالية بحيث يكون الخط المستقيم ل محور تماثل



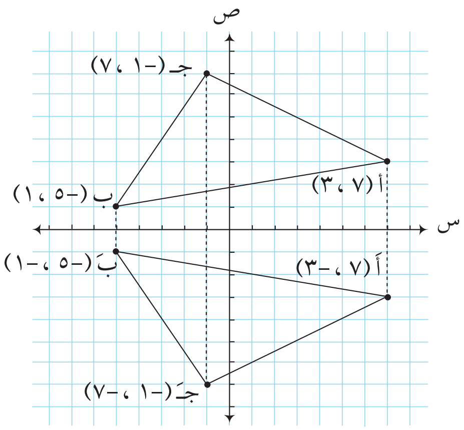

الشكل (٤-٢٥)

## ★ الإنعكاس في محور السينات :

### نشـــاط

إذا كان محور الانعكاس هو محور السينات فإن :

- صورة أ (٧ ، ٣) هي أَ (٧ ، -٣)
- صورة ب (-٥ ، ١) هي بَ (-٥ ، -١)
- صورة جـ (-١ ، ٧) هي جـَ (-١ ، -٧)



الشكل (٤-٢٦)

ماذا تستنتج؟

لابد أنّك توصلت إلى القاعدة الآتية :

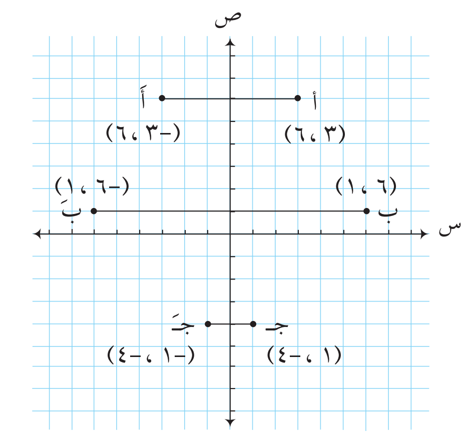
> صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس في محور السينات هي النقطة (س ، -ص)

## ★ الإنعكاس في محور الصادات:

### نشـــاط

إذا كان محور الانعكاس هو محور الصادات :

- صورة أ (٣ ، ٦) هي أَ (-٣ ، ٦)
- صورة ب (٦ ، ١) هي بَ (-٦ ، ١)
- صورة جـ (١ ، -٤) هي جـَ (-١ ، -٤)



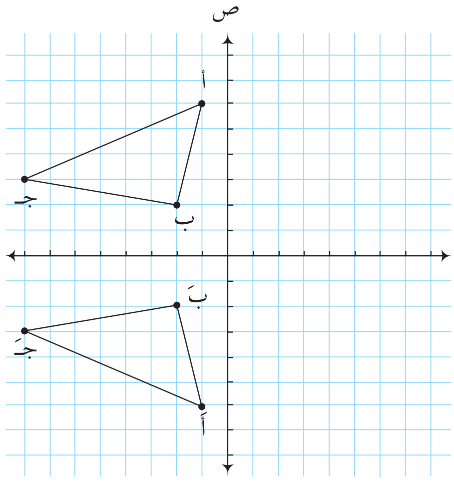
الشكل (٤-٢٧)

ماذا نستنتج؟

لابد أنّك توصلت إلى القاعدة الآتية؟

> صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس في محور الصادات هي النقطة (-س ، ص) .

**مثال (١):** أرسم صورة المثلث أ ب جـ بالانعكاس في محور السينات ، حيث أ (−١ ، ٦)
ب (−٢ ، ٢)، جـ (−٨ ، ٣)



الشكل (٤−٢٨)

**الحـل:** **بالانعكاس في محور السينات:**

صورة (س ، ص) هي (س ، −ص)

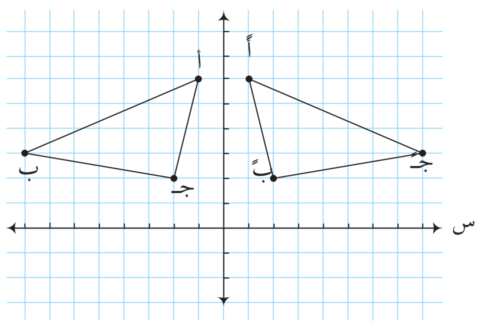
∴ صورة أ (−١ ، ٦) هي أَ (−١ ، −٦)

صورة ب (−٢ ، ٢) هي بَ (−٢ ، −٢)

صورة جـ (−٨ ، ٣) هي جـَ (−٨ ، −٣) .

∴ صورة المثلث أ ب حـ بالانعكاس في محور السينات هي أَ بَ جـَ، كما في الشكل (٤−٢٨) المجاور .

**مثال (٢):** أرسم صورة المثلث أ ب جـ بالانعكاس في محور الصادات، حيث أ (−١ ، ٦)
ب (−٢ ، ٢)، جـ (−٨ ، ٣)



الشكل (٤−٢٩)

**الحـل:** ٢- **بالانعكاس في محور الصادات:**

صورة (س ، ص) هي (−س ، ص)

∴ صورة أ (−١ ، ٦) هي أً (١ ، ٦)

صورة ب (−٢ ، ٢) هي بً (٢ ، ٢)

صورة جـ (−٨ ، ٣) هي جـً (٨ ، ٣)

صورة المثلث أ ب جـ بالانعكاس في محور الصادات هي أً بً جـً، كما في الشكل (٤−٢٩) المجاور

## تمارين ومسائل

أستخدم شبكة المربعات (الرسم البياني) في حل التمارين والمسائل الآتية :

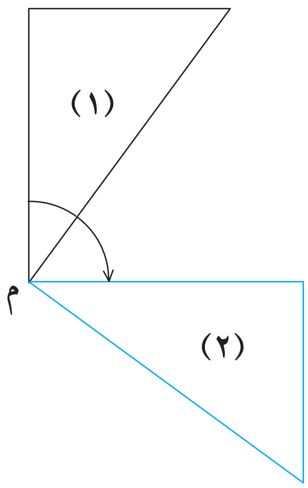
١ أرسم الشكل الرباعي أب جـ د، حيث أ (٢ ، ٣)، ب (٥ ، −١)، جـ (٨ ، ٥)، د (٦ ، ٨)
ثم أجد صورة الشكل أ ب جـ د بالانعكاس في محور السينات .

٢ أرسم الشكل الرباعي أب جـ د، حيث أ (٢ ، ٣)، ب (٥ ، −١)، جـ (٨ ، ٥)، د (٦ ، ٨)
ثم أجد صورة الشكل أ ب جـ د بالانعكاس في محور الصادات .

٣ أجد انعكاس المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه أ (٧ ، ٣)، ب (٥ ، ٤)، جـ (٢ ، ١) حول محور الانعكاس ص = ٢ ، وأرسم المثلّث أ ب جـ وصورته على نفس المستوى الديكارتي .

# ٤-٢ الـــدوران

الدوران هو تحويل هندسي آخر كثيراً ما نشاهده ونلمسه في حياتنا اليومية مثل حركة المروحة الهوائية التي تثبّت في سقف الغرفة أو دولاب الحظ عند دورانه، أو عجلة الألعاب في متنزّه.



الشكل (٤-٣٠)

عند دوران شكل يحدث له تحريك بزاوية معينة حول نقطة ثابتة تسمى مركز الدوران، لذا عند وصف الدوران لا بد من ذكر زاويته ومركزه.

ويفضّل لرسم الصورة تحت تأثير أي دوران استخدام الورق الشفاف في حال توفره.

لاحظ الشكل (٤-٣٠) حيث المثلث (٢) هو صورة للمثلث (١) تحت تأثير دوران مركزه النقطة م بزاوية ٩٠ْ باتجاه عقارب الساعة.

**مثال (١)** ارسم المثلّث أ ب و ، الذي فيه أ (٤ ، ٠) ب (٤ ، ٣) ، و نقطة الأصل، ثم ارسم المثلث أَ بَ و ، الذي هو صورة المثلث أ ب و ، عند دورانه بزاوية ٩٠ْ عكس عقارب الساعة حول النقطة و .

**الحـــل:** صورة النقطة أ هي أَ ، حيث أن :

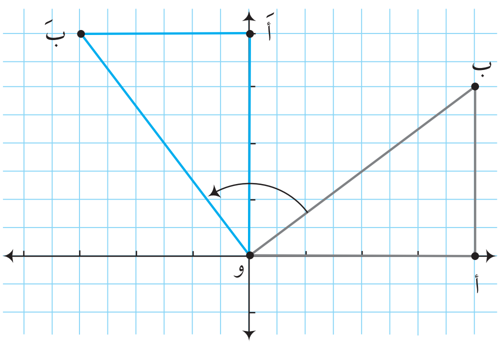
و أَ = وأ و ∢ أ و أَ = ٩٠ْ

وصورة النقطة ب هي بَ حيث أن :

و بَ = وب و ∢ بَ و ب = ٩٠ْ

وصورة النقطة و هي و نفسها

إذن صورة المثلث أ ب و هي أَبَ و كما في الشكل.



الشكل (٤-٣١)

**يمكنك الاستنتاج أن :**

١ بُعد النقطة عن مركز الدوران = بعد صورتها عن مركز الدوران (في الحالة أعلاه أ و = أَ و)

٢ الزاوية عند مركز الدوران بين النقطة وصورتها = زاوية الدوران (في الحالة أعلاه زاوية أ و أَ =٩٠ْ)

**مثــال(٢):** أوجد صورة المربـــــع أ ب جـ د ، حيث أ(٦ ، ٢) ، ب(٦ ، ٦)، جـ(٢ ، ٦)، د(٢ ، ٢) . وأسمّيها أَ بَ جـَ دَ . إثر دورانه بزاوية ١٨٠ْ حول نقطة الأصل .

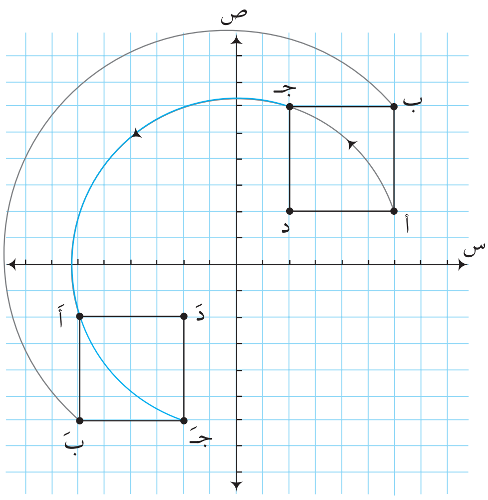
**الحــل:** من الشكل (٤-٣٢)، تلاحظ أن الدوران بزاوية قياسها ١٨٠ْ تكون فيه صورة أ ب جـ د كما يلي :

أ (٦ ، ٢) ← أَ(-٦ ، -٢)

ب(٦ ، ٦) ← بَ(-٦ ، -٦)

جـ(٢ ، ٦) ← جـَ(-٢ ، -٦)

د (٢ ، ٢) ← دَ(-٢ ، -٢)




الشكل (٤-٣٢)

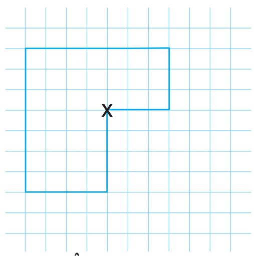
**وبشكل عام:** صورة النقطة (س، ص) تحت تأثير الدوران حول نقطة الأصل بزاوية ١٨٠ْ هي النقطة (-س، -ص)

**ملاحظة:** يسمى أيضاً الدوران حول نقطة بمقدار ١٨٠ْ انعكاساً في تلك النقطة.

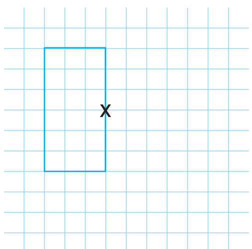
## تمارين ومسائل

استخدم ورق الرسم البياني والورق الشفاف إن أمكن في حل التمارين التالية :

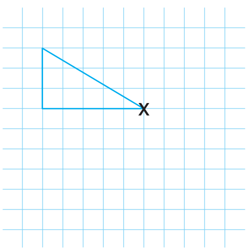
١ في كلٍ من الأشكال التالية ارسم صورة الشكل بعد دورانه بالزاوية المطلوبة حول مركز الدوران المشار إليه بالحرف x



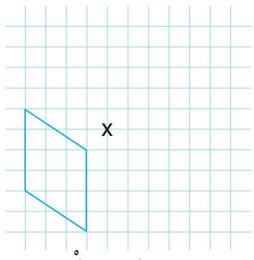

دوران ١٨٠ْ



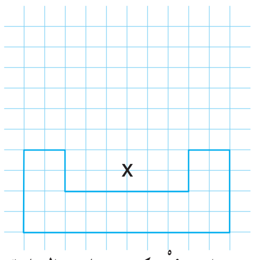

دوران ٩٠ْ مع عقارب الساعة



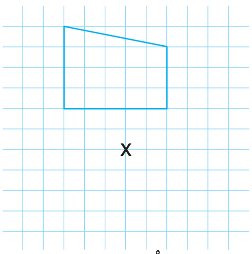

دوران ١٨٠ْ




دوران ١٨٠ْ

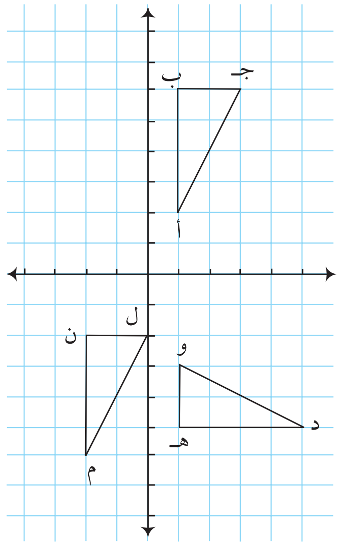



دوران ٩٠ْ عكس عقارب الساعة




دوران ٩٠ْ مع عقارب الساعة

٢ ارسم الشكل (٤-٣٣) المجاور ثم ارسم الشكل المطلوب فيما يلي :




الشكل (٤-٣٣)

(١) ارسم المثلث أَ بَ جَـ والذي هو صورة المثلّث أ ب جـ بعد دورانه بزاوية ٩٠° باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل

(٢) ارسم المثلّث دَ هـَ وَ ، والذي هو صورة الثلّث د هـ و ، بعد دورانه بزاوية ١٨٠° حول نقطة الأصل

(٣) أرسم الثلّث مَ نَ لَ والذي هو صورة المثلث م ن ل ، بعد دورانه بزاوية ٩٠° بعكس عقارب الساعة حول نقطة الأصل .

(٤) أكتب إحداثيات النقاط أَ ، هـَ ، مَ

٣ في المستوى الديكارتي عيّن النقاط أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، حيث أ (٣ ، ٣) ، ب (٧ ، ٣) ، جـ (٧ ، ١) ، د (-١ ، -٣) ، هـ (-١ ، -٧) ، و (-٣ ، -٧)

(١) ارسم المثلّث أَ بَ جَـ والذي هو صورة المثلّث أ ب جـ بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية ٩٠° عكس عقارب الساعة .

(٢) المثلّث أً بً جـً هو صورة المثلّث أ ب جـ بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية ٩٠° مع عقارب الساعة أرسم الثلّث أً بً جـً .

(٣) المثلّث دَ هـَ وَ هو صورة المثلّث د هـ و بالدوران ١٨٠° حول نقطة الأصل أرسم المثلّث دَ هـَ وَ .

(٤) أكتب احداثيات كل من النقاط أَ ، دَ ، أً

٤ ارسم المثلّث س ص ع حيث س (١ ، ٦) ، ص (٥ ، ٦) ، ع (٥ ، ٤) .

(١) ارسم المثلّث سَ صَ عَ والذي هو صورة المثلّث س ص ع ، بالدوران حول النقطة (١ ، ٤) بزاوية ١٨٠°

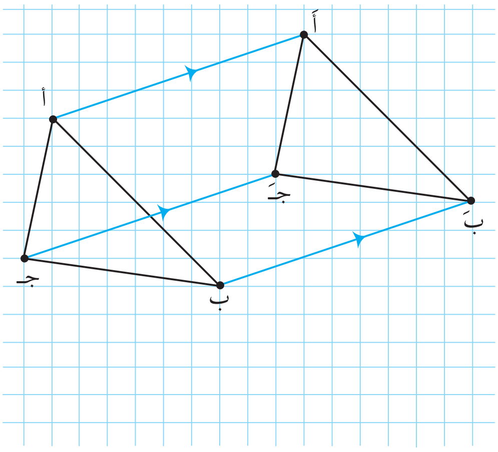
(٢) ارسم المثلّث سً صً عً والذي هو صورة المثلّث س ص ع بعد دورانه بزاوية ٩٠° باتجاه عقارب الساعة حول النقطة (٢ ، ٢)

# ٤ - ٣ الانســحاب

الانسحاب هو تحويل هندسي يقوم بتحريك الأشكال الهندسية باتجاه معين ومسافة معينة، دون احداث تغيير في الشكل أو القياس أو الوضع أو الزوايا.

**مثال(١):** أرسم صورة المثلث أ ب جـ المرسوم في الشكل (٤-٣٤)، بعد سحبه إلى اليمين ٩ وحدات، ثم ٣ وحدات إلى الأعلى.

**الحــل:** المثلث أَ بَ جـَ هو صورة المثلث أ ب جـ كما في الشكل (٤-٣٤). لاحظ الانسحاب في اتجاه اليمين ثم إلى الأعلى، وباتجاه السهم.

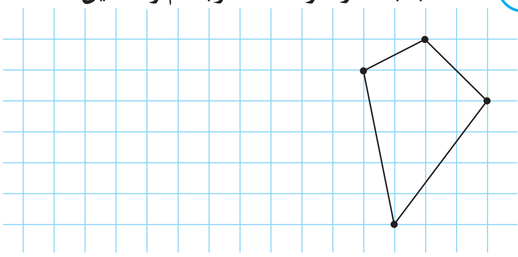


الشكل (٤-٣٤)

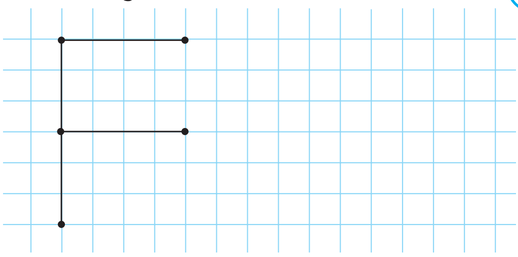
## تدريب صفّي

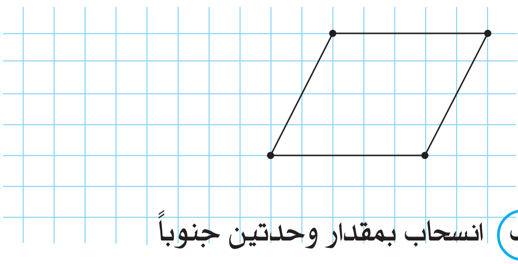
أرسم صورة كل شكل بالانسحاب الموضح.

أ) انسحاب بمقدار ٤ وحدات غرباً ثم وحدتين شمالاً

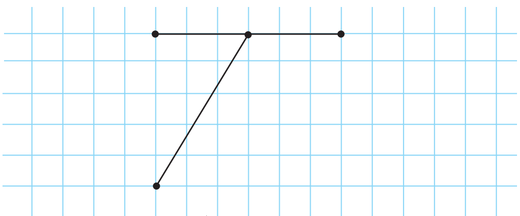


جـ) انسحاب بمقدار ٥ وحدات شرقاً ثم أربع وحدات جنوباً





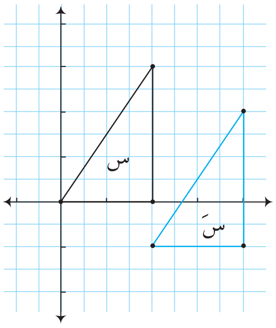
ب) انسحاب بمقدار وحدتين جنوباً



د) انسحاب بمقدار ٦ وحدات شرقاً ثم وحدة واحدة جنوباً

الشكل (٤-٣٥)

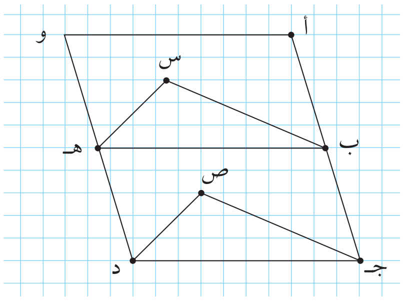
**مثال(٢):** المثلث سَ هو صورة المثلث س تحت تأثير الانسحاب بمقدار وحدتين إلى اليمين (باتجاه محور السينات الموجب) ثم وحدة واحدة إلى الأدنى (باتجاه محور الصادات السالب).
لاحظ أن صورة النقطة (٢ ، ٣) هي النقطة (٤ ، ٢) أي أن الإحداثي السيني للصورة يساوي الإحداثي السيني للنقطة + ٢، بينما الإحداثي الصادي للصورة يساوي الإحداث الصادي للنقطة - ١ .



الشكل (٤-٣٦)

## تمارين ومسائل

**٢** في الشكل (٤-٣٧): بفرض أن ص هي صورة س تحت تأثير انسحاب، أجد صورة ما يأتي تحت تأثير نفس الانسحاب: أ ، و ، ∠ ب س هـ، ب س، ب هـ.



الشكل (٤-٣٧)

**٣** في المستوى الديكارتي:

أ) أجد صورة النقطة (-٢ ، -٥) بانسحاب بمقدار ٥ وحدات باتجاه محور الصادات الموجب.

ب) أجد صورة النقطة (٢ ، ١) بانسحاب بمقدار ٤ وحدات باتجاه محور السينات السالب، ثم بمقدار وحدتين باتجاه محور الصادات الموجب.

**٤** أعيّن صورة المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه أ(٢ ، ١) ، ب (٥ ، ٧)، جـ(-١ ، ٢) بانسحاب بمقدار ٤ وحدات باتجاه محور الصادات السالب، ثم وحدتين باتجاه محور السينات الموجب.

**٤** ارسم المثلّث أ ب جـ حيث أ (٤ ، ٠) ، ب (٤ ، ٣) ، جـ(٠ ، ٣) ، ثم أرسم:

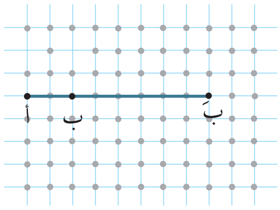
١) المثلّث أ$_{١}$ ب$_{١}$ جـ$_{١}$ والذي هو انسحاب المثلّث أ ب جـ ٣ وحدات باتجاه محور السينات السالب، ثم ٤ وحدات باتجاه محور الصادات السالب.

٢) المثلّث أ$_{٢}$ ب$_{٢}$ جـ$_{٢}$ والذي هو انسحاب المثلّث أ ب جـ بمقدار ٥ وحدات باتجاه محور الصادات السالب.

# ٤-٤ التمـــــدد

### مثـال (١):

على لوحة المسامير المقابلة، مُدّدت قطعة مطاط أ ب، وكان طولها في الأصل ١ سم، مُدّدت إلى ٤ أضعاف طولها، ما الطول الجديد بعد التمدد، أي طول القطعة أ بَ؟



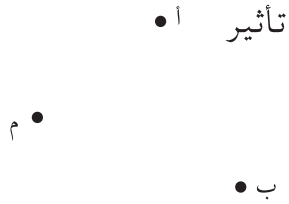

الشكل (٤-٣٨)

**الحـل:** طول أ بَ = ٤ x ١ = ٤ سم

**يسمى التحويل الذي جرى على قطعة المطاط تمدداً، وتسمى قيمة التمدد وهي (٤) في هذه الحالة بمعامل التمدد وتسمى النقطة أ مركز التمدد.**

## نشـــــاط

(١) أنقل الشكل (٤-٣٩) إلى دفترك، ثم عيّن صورة النقطتين أ، ب تحت تأثير التمدد الذي مركزه م ومعامله ٣.




الشكل (٤-٣٩)

(٢) ما صورة القطعة المستقيمة أ ب ؟

(٣) هل أَ بَ // أ ب ؟ (٤) أوجد النسبة $\frac{\text{أَ بَ}}{\text{أ ب}}$ .

### مثـال (٢):

يمثل الشكل (٤-٤٠) المثلث أ و ب، أوجد إحداثيات رؤوس المثلث أَ و بَ والذي هو صورة المثلث أ و ب في التمدد الذي معامله ٢ ومركزه و (حيث و نقطة الأصل).

### الحـل:

صورة النقطة أ (٤ ، ٠) هي ٢ X (٤ ، ٠) = (٨ ، ٠)

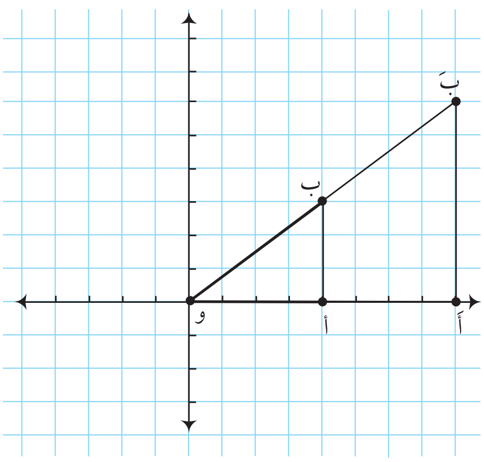
أي أنّ أَ (٨ ، ٠)

صورة النقطة ب (٤ ، ٣) هي ٢ X (٤ ، ٣) = (٨ ، ٦)

أي أنّ بَ (٨ ، ٦)

صورة النقطة و (٠ ، ٠) هي ٢ X (٠ ، ٠) = (٠ ، ٠)

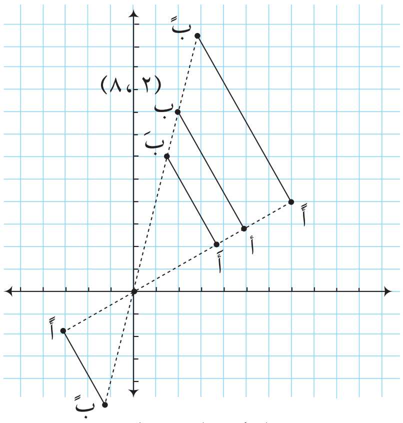
أي أنّ إحداثيات صورة النقطة و هي (٠ ، ٠)




الشكل (٤-٤٠)

## مثــال(٢):

إذا كانت أ = (٤ ، ٢) ، ب = (٢ ، ٨). أوجد صورة أب نتيجة التمدد في الحالات الآتية :




الشكل (٤-٤١)

١) تمدد مركزه م (٠ ، ٠) ومعامله $\frac{٣}{٤}$

٢) تمدد مركزه م (٠ ، ٠) ومعامله $-\frac{١}{٢}$

٣) تمدد مركزه م (٠ ، ٠) ومعامله ٢

## الحــل:

١) أ (٤ ، ٢) ← أَ (٣ ، $\frac{٣}{٢}$) ب (٢ ، ٨) ← بَ ($\frac{٣}{٢}$ ، ٦)

٢) أ (٤ ، ٢) ← أً (-٢ ، -١) ب (٢ ، ٨) ← بَ (-١ ، -٤)

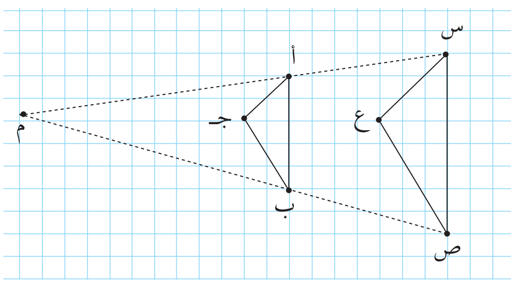
٣) أ (٤ ، ٢) ← أً (٨ ، ٤) ب (٢ ، ٨) ← بً (٤ ، ١٦)

**لاحظ أنه في التمدد الذي معامله ك :**

- إذا كانت |ك| > ١ فإن التمدد يكون تكبيراً.
- إذا كانت |ك| < ١ فإن التمدد يكون تصغيراً.

## تدريــب صفّي

في الشكل (٤-٤٢): Δ س ص ع صورة Δ أ ب جـ ناتج عن تمدد معامله ٨ ومركزه م. أجد :




الشكل (٤-٤٢)

أ) إذا كان م ب = ٦ فما طول م ص ؟

ب) إذا كان س ص = ٣٢ فما طول أ ب؟

جـ) إذا كان قياس ∢ ب جـ أ = ١٠٠° فما قياس ∢ س ع ص؟

د) هل المثلث أ ب جـ ، س ص ع متشابهان أم متطابقان ؟

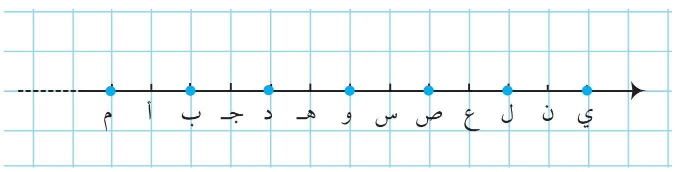
## تمارين ومسائل

**١** أجد بالرسم البياني صورة المثلث الذي رؤوسه أ (٢ ، ١) ، ب(-١ ، ١)، جـ(-٢ ، -٥) الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله -٢ .

**٢** هل التمدد تكبير أم تصغير، إذا كان معامل التمدد يساوي :

أ $\frac{١}{٢}$ ب $-\frac{٥}{٢}$ جـ $\frac{٣}{٢}$ د $\frac{١}{١٠}$

**٣** في الشكل (٤-٦١) : لكل من معاملات التمدد الآتي، أجد صورة النقطة «و» بالنسبة للتمدد الذي مركزه م




الشكل (٤-٤٣)

ومعامل التمدد له يساوي :

أ $١\frac{١}{٦}$ ب $\frac{٢}{٣}$ جـ $\frac{١}{٢}$ د $١\frac{٥}{٦}$

**٤** أرسم المثلث أ ب جـ الذي فيه أ(٠ ، ٠)، ب(٤ ، ٠)، جـ(٣ ، ٤) .

أ أرسم المثلث أَ بَ جَـ، والذي هو صورة المثلث أ ب جـ، والناتج عن تمدد مركزه نقطة الأصل، ومعامله ٢ .

ب أرسم المثلث أً بً جـً، والذي هو صورة المثلث أ ب جـ الناتج عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله -١ .

جـ أرسم المثلث أً بً جـً، والذي هو صورة المثلث أ ب جـ الناتج عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله ٣ .

د أجد مساحة المثلث والصورة في الفروع أ ، ب ، جـ السابقة، ثم أجد العلاقة بين مساحة الأصل والصورة في كل تمدد .

الوحدة

# ٥

# الإحصاء

# ٥-١ مقاييس التشتت

لقد درست سابقاً مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات) التي بواسطتها يمكن تلخيص البيانات في قيمة واحدة تصف اتجاه هذه البيانات في التمركز حول تلك القيمة .

ولكن استخدام هذه المقاييس لوحدها قد يؤدي إلى استنتاجات غير دقيقة حول طبيعة البيانات التي نقوم بدراستها، كما يبيّن لنا المثال الآتي: لدينا ثلاث مجموعات من البيانات أ، ب، جـ :

أ : ٢، ٣، ٤، ٤، ٧

ب: ٤، ٤، ٤، ٤، ٤

جـ: صفر، صفر، ٤، ٤، ١٢

لمقارنة هذه المجموعات، فإن أول ما نفكر به هو الوسط الحسابي، وهذا يساوي ٤ للمجموعات الثلاث، وكذلك الوسيط يساوي المنوال، ويساوي ٤ لهذه المجموعات، وهذه المقاييس تؤدي إلى الاستنتاج بأن هذه المجموعات متشابهة، وهي نتيجة مضللة، وغير صحيحة لأن المجموعات الثلاث مختلفة، حيث قيم المجموعة أ أكثر تجانساً من قيم المجموعة جـ، وقيم المجموعة ب متجانسة تماماً، وهذا يؤدي إلى التفكير في مقاييس أخرى بالإضافة إلى مقاييس النزعة المركزية لوصف البيانات الوصف الدقيق، وهذه المقاييس هي مقاييس التشتت التي تستخدم لوصف تباعد القيم وتبعثر بعضها عن بعض، وبالتالي عن وسطها الحسابي، ومن هذه المقاييس: **المدى**، **والانحراف المعياري**، **والتباين**.

## أ المدى :

يُعرّف المدى بأنه: **الفرق بين أكبر القيم وأصغرها لمجموعة من البيانات**، ويعتبر المدى أبسط مقاييس التشتت وأسهلها حساباً، وبالطبع كلما كان المدى صغيراً كان ذلك دليلاً على تجانس القيم وانخفاض التشتت. فمثلاً في مجموعة البيانات:

٣، ٧، ١٠، ٢، ١٩، ٢٥ يكون المدى: ٢٥ − ٢ = ٢٣

**مثال (١):** أحسب المدى للبيانات الآتية: ١٦، ١٥، ١٢، ٢٠، ١٩، ٧، ١٣، ٥، −١

**الحل:** المدى = أكبر قيمة − أصغر قيمة

=٢٠−(−١)

= ٢١

أما في حالة الجداول التكرارية ذات الفئات فإن المدى يعرف بأنه **الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة والحد الأدنى للفئة الأولى** (على فرض أن الفئات مرتبة تصاعدياً) + ١ .

**مثال (٢):** الجدول التكراري* الآتي يمثل علامات طلبة الصف التاسع في الرياضيات :

| فئة العلامات | ٣٠–٣٩ | ٤٠–٤٩ | ٥٠–٥٩ | ٦٠–٦٩ | ٧٠–٧٩ | ٨٠–٨٩ | ٩٠–٩٩ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٢ | ٣ | ٦ | ١٣ | ٨ | ٥ | ٣ |

احسب المدى للعلامات

**الحل:** المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة – الحد الأدنى للفئة الأولى + ١

= ٩٩ – ٣٠ + ١

= ٧٠

يعتبر المدى أقل مقاييس التشتت دقة ، لأنه يعتمد في حسابه على قيمتين فقط ، وهذا يؤدي إلى نتائج مضللة وخاصة في حالة وجود قيم شاذة . فمثلاً : إذا كانت علامات مجموعة من طلبة الصف التاسع في مدرسة ما كما يأتي : ٨١ ، ٧٤ ، ٧٩ ، ٨٥ ، ٢٠ ، ٧٧ ، ٨٦ ، ١٠٠ ، ٨٠

فإن المدى = ١٠٠ – ٢٠ = ٨٠ بينما معظم العلامات تقع بين ٧٤ و ٨٦ أي أنها متقاربة بعضها من بعض وهذا عكس ما يُستنتج من قيمة المدى .

## ب الانحراف المعياري:

يعرف الانحراف المعياري بأنه الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي ، فإذا كانت $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، . . . ، $س_ن$ مفردات عددها ن ، ووسطها الحسابي $\bar{س}$ :

فإن الانحراف المعياري $\sigma$ = $\sqrt{\frac{\text{مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي}}{\text{عدد القيم}}}$

أو بالرموز $\sigma = \sqrt{\frac{(س_١ - \bar{س})^٢ + (س_٢ - \bar{س})^٢ + \dots + (س_ن - \bar{س})^٢}{ن}}$

أو $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^٢}{ن}}$

حيث $\bar{س}$ الوسط الحسابي لمجموعة البيانات $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$ التي عددها ن .

ملاحظة للمعلم : تكتب الفئات إما على الصورة ٣٠- ، ٤٠- ، ... أو على صورة ٣٠-٣٩ ، ٤٠-٤٩ ، ... وقد اعتمدنا الصورة الثانية في هذه الكتاب انسجاماً مع كثير من المصادر في نفس الموضوع ، وفي هذه الحالة يكون للفئة حدود فعلية فمثلاً الفئة ٣٠-٣٩ حدودها هي ٢٩,٥-٣٩,٥ .

**مثال (١):** احسب الانحراف المعياري لمجموعة البيانات التالية : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

**الحل:**

(١) نحسب الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥}{٥} = \frac{١٥}{٥} = ٣$

(٢) نحسب الانحرافات عن الوسط الحسابي ونربعها :

| س | $\overline{س}$ | $س - \overline{س}$ | $(س - \overline{س})^٢$ |
|---|---|---|---|
| ١ | ٣ | ٢− | ٤ |
| ٢ | ٣ | ١− | ١ |
| ٣ | ٣ | صفر | صفر |
| ٤ | ٣ | ١ | ١ |
| ٥ | ٣ | ٢ | ٤ |
| | | المجموع | ١٠ |

(٣) نجد مجموع مربعات الانحرافات ونحسب متوسطها :

$$= \frac{٤ + ١ + ٠ + ١ + ٤}{٥} = \frac{١٠}{٥} = ٢$$

(٤) نجد الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربعات الانحرافات عن وسطها الحسابي ،
فيكون الانحراف المعياري يساوي $\sqrt{٢}$

أو بالرموز $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^٢}{ن}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{١٠}{٥}}$$

$$\sigma = \sqrt{٢}$$

* *مقترح : يمكن استخراج الانحراف المعياري باستخدام برنامج Excel . انظر الصفحة ١٦٠ في ملحق التطبيقات الحاسوبيّة .*

**أما في حالة حساب الانحراف المعياري للجداول التكرارية** فإننا نستعمل الصيغة الآتية :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum ت(س - \overline{س})^٢}{ن}}$$

حيث : س : تمثل القيمة أو مركز الفئة $\overline{س}$ : الوسط الحسابي
ت : تكرار الفئة ن : مجموع التكرارات

**مثال (٢):** الجدول التكراري الآتي يمثل عدد الأطفال لكل عائلة من ٥٠ عائلة فلسطينية :

| عدد الأطفال | صفر | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد العائلات | ٥ | ٥ | ٩ | ١٠ | ١٢ | ٥ | ٤ |

احسب الانحراف المعياري لعدد الأطفال .

**الحــل:**

| عدد الأطفال(س) | عدد العائلات(ت) | ت × س | $س - \bar{س}$ | $(س - \bar{س})^٢$ | $ت \times (س - \bar{س})^٢$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٥ | ٠ | ٣− | ٩ | ٤٥ |
| ١ | ٥ | ٥ | ٢− | ٤ | ٢٠ |
| ٢ | ٩ | ١٨ | ١− | ١ | ٩ |
| ٣ | ١٠ | ٣٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ٤ | ١٢ | ٤٨ | ١ | ١ | ١٢ |
| ٥ | ٥ | ٢٥ | ٢ | ٤ | ٢٠ |
| ٦ | ٤ | ٢٤ | ٣ | ٩ | ٣٦ |
| المجموع | ٥٠ | ١٥٠ | | | ١٤٢ |

(١) نحسب الوسط الحسابي لعدد الأطفال : $\bar{س} = \frac{\sum (ت \times س)}{ن} = \frac{١٥٠}{٥٠} = ٣$

(٢) نحسب الانحرافات عن الوسط الحسابي $(س - \bar{س})$

(٣) نربع الانحرافات عن الوسط الحسابي $(س - \bar{س})^٢$

(٤) نضرب مربع الانحرافات عن الوسط الحسابي في التكرار ، ونجد مجموع هذا العمود والذي يساوي ١٤٢ .

(٥) نطبق قانون الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{\frac{\sum ت(س - \bar{س})^٢}{ن}}$

$$= \sqrt{\frac{١٤٢}{٥٠}} = \sqrt{٢,٨٤} = ١,٦٩$$

**مثال (٣):** إذا كانت أطوال ٣٠ طالباً (بالسنتيمترات) كما في الجدول التالي :

| الفئات | ١٣٠–١٣٤ | ١٣٥–١٣٩ | ١٤٠–١٤٤ | ١٤٥–١٤٩ | ١٥٠–١٥٤ | ١٥٥–١٥٩ | ١٦٠–١٦٤ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٢ | ٣ | ٧ | ١٠ | ٤ | ٣ | ١ |

احسب الانحراف المعياري للأطوال .

**الحـــل:**

| الفئات | التكرار (ت) | مراكز الفئات (س) | ت x س | $س - \overline{س}$ | $(س - \overline{س})^٢$ | $ت(س - \overline{س})^٢$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ١٣٠–١٣٤ | ٢ | ١٣٢ | ٢٦٤ | ١٤– | ١٩٦ | ٣٩٢ |
| ١٣٥–١٣٩ | ٣ | ١٣٧ | ٤١١ | ٩– | ٨١ | ٢٤٣ |
| ١٤٠–١٤٤ | ٧ | ١٤٢ | ٩٩٤ | ٤ | ١٦ | ١١٢ |
| ١٤٥–١٤٩ | ١٠ | ١٤٧ | ١٤٧٠ | ١ | ١ | ١٠ |
| ١٥٠–١٥٤ | ٤ | ١٥٢ | ٦٠٨ | ٦ | ٣٦ | ١٤٤ |
| ١٥٥–١٥٩ | ٣ | ١٥٧ | ٤٧١ | ١١ | ١٢١ | ٣٦٣ |
| ١٦٠–١٦٤ | ١ | ١٦٢ | ١٦٢ | ١٦ | ٢٥٦ | ٢٥٦ |
| المجموع | ٣٠ | | ٤٣٨٠ | | | ١٥٢٠ |

(١) نحسب الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{\sum (ت \times س)}{ن}$ حيث ن مجموع التكرارات .

$$\overline{س} = \frac{٤٣٨٠}{٣٠} = ١٤٦$$

(٢) نحسب انحرافات مراكز الفئات س عن الوسط الحسابي وهي $(س - \overline{س})$

(٣) نُربع الانحرافات في (٢) وهي $(س - \overline{س})^٢$

(٤) نضرب مربعات الانحرافات في التكرارات المناظرة وهي $ت(س - \overline{س})^٢$ ثم نجمع

(٥) نطبق القانون : $\sigma = \sqrt{\frac{\sum ت(س - \overline{س})^٢}{ن}}$

$$= \sqrt{\frac{١٥٢٠}{٣٠}} = \sqrt{٥٠,٧} \simeq ٧,١$$

## جـ التباين:

يعرف التباين بأنه مربع الانحراف المعياري ويعتبر أحد مقاييس التشتت ويستخدم في كثير من الدراسات الاحصائية المتقدمة .

**مثال (١):** إذا كان الانحراف المعياري لعدد من الفردات = ٤ فما هو التباين؟

**الحل:** التباين = مربع الإنحراف المعياري

التباين = $\sigma^{٢}$ = $٤^{٢}$ = ١٦

## تدريبات صفّية

١ أوجد الانحراف المعياري للمفردات : ٦ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٨

٢ إذا كانت مبيعات إحدى المحلات التجارية خلال اسبوع بالدنانير كما يلي :

٦٣ ، ٨٤ ، ٧٨ ، ٨٧ ، ٦٩ ، ٦٢ ، ٦٨

أجد كلاً من :

أ) المدى .

ب) التباين .

جـ) الانحراف المعياري .

٣ إذا كانت الأجور اليومية التي يتقاضاها عدد من العمال بالدينار كما يأتي :

| الأجر اليومي | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٤ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٤ | ٨ | ١٠ | ١٥ | ٨ | ٥ |

أحسب الانحراف المعياري للأجور .

٤ إذا كان عدد الأبناء الذكور لدى العائلات التي تضم ٤ أطفال كما في الجدول الآتي :

| عدد الأبناء الذكور | صفر | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد العائلات | ٤ | ٢ | ٦ | ٦ | ٢ |

أحسب الانحراف المعياري لعدد الأبناء الذكور

## تمارين ومسائل

١ إذا كان مستوى السكر في الدم لثمانية مرضى أُدخلوا إلى مستشفى ما كما يأتي :

٨٠ ٧٦ ٨١ ٨٨ ٧١ ٧٣ ٨٩ ٧٤

أحسب : (أ) المدى . (ب) التباين . (جـ) الانحراف المعياري .

٢ الجدول التكراري الآتي يمثل توزيع علامات ٤٠ طالبا في أحد المباحث الدراسيّة :

| فئات العلامات | ٤٠–٤٤ | ٤٥–٤٩ | ٥٠–٥٤ | ٥٥–٥٩ | ٦٠–٦٤ | ٦٥–٦٩ | ٧٠–٧٤ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٢ | ٦ | ٨ | ٤ | ١٠ | ٦ | ٤ |

أحسب الانحراف المعياري للأعمار .

٣ الجدول التكراري الآتي يمثل الأجور الاسبوعية لـ ٣٠ موظفاً (مقدّرة بالدينار) :

| الفئات | ٣٨–٤٢ | ٤٣–٤٧ | ٤٨–٥٢ | ٥٣–٥٧ | ٥٨–٦٢ | ٦٣–٦٧ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التـــكرار | ٢ | ٤ | ٦ | ٧ | ٨ | ٣ |

أحسب المدى والتباين والانحراف المعياري للأجور .

## ملاحظات على الانحراف المعياري:

(١) عند اضافة ( أو طرح) عدد ثابت لكل قيمة من المشاهدات ، فإن قيمة الانحراف المعياري لا تتغير .

(٢) عند ضرب ( أو قسمة) كل قيمة من المشاهدات في عدد ثابت ، فإن الانحراف المعياري الجديد يساوي الانحراف المعياري الأصلي مضروباً ( أو مقسوماً ) بالقيمة المطلقة لهذا العدد الثابت .

ولتوضيح تأثير العمليات الحسابية على قيمة الانحراف المعياري نأخذ المثال الآتي :

**مثـــال:**

(أ) احسب الانحراف المعياري للبيانات التالية : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧

(ب) احسب الانحراف المعياري بعد إضافة العدد ١٠٠ لكل قيمة من قيم البيانات في (أ)

(جـ) احسب الانحراف المعياري بعد ضرب كل قيمة من قيم البيانات في (أ) بالعدد -٣ .

**الحـــل:** (أ)

| س | $س - \overline{س}$ | $(س - \overline{س})^٢$ |
|---|---|---|
| ١ | -٣ | ٩ |
| ٢ | -٢ | ٤ |
| ٣ | -١ | ١ |
| ٤ | ٠ | ٠ |
| ٥ | ١ | ١ |
| ٦ | ٢ | ٤ |
| ٧ | ٣ | ٩ |
| ٢٨ | | ٢٨ |

١ نحسب الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٢٨}{٧} = ٤$

٢ نحسب انحرافات القيم عن وسطها الحسابي $(س - \overline{س})$

٣ نربع انحرافات القيم ثم نجمعها $\sum (س - \overline{س})^٢$

٤ نطبق القانون :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^٢}{ن}}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٨}{٧}}$$

$$= \sqrt{٤}$$

$$= ٢$$

ب بإضافة ١٠٠ لكل قيمة فإن ص = س + ١٠٠ ، حيث س القيم الأصليّة ، وص القيم الجديدة نحصل على القيم الجديدة كما في الجدول الآتي :

| س | ص = س + ١٠٠ | ص − $\overline{ص}$ | (ص − $\overline{ص}$)$^{٢}$ |
|---|---|---|---|
| ١ | ١٠١ | −٣ | ٩ |
| ٢ | ١٠٢ | −٢ | ٤ |
| ٣ | ١٠٣ | −١ | ١ |
| ٤ | ١٠٤ | ٠ | ٠ |
| ٥ | ١٠٥ | ١ | ١ |
| ٦ | ١٠٦ | ٢ | ٤ |
| ٧ | ١٠٧ | ٣ | ٩ |
| | ٧٢٨ | | ٢٨ |

١ نحسب الوسط الحسابي الجديد $\overline{ص} = \frac{\sum ص}{ن} = \frac{٧٢٨}{٧} = ١٠٤$

٢ نحسب انحرافات القيم الجديدة عن وسطها الحسابي (ص − $\overline{ص}$)

٣ نربع انحرافات القيم الجديدة (ص − $\overline{ص}$)$^{٢}$ ، ثم نجد $\sum$ (ص − $\overline{ص}$)$^{٢}$

٤ نطبق القانون :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (ص - \overline{ص})^{٢}}{ن}}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٨}{٧}} = \sqrt{٤} = ٢$$ = الانحراف المعياري للقيم الأصلية .

**أي أن قيمة الانحراف المعياري لا تتغير عند إضافة ( أو طرح ) عدد ثابت للقيم الأصلية ، وينطبق هذا على التباين .**

(جـ) بضرب كل قيمة من القيم الأصلية في (أ) بالعدد −٣ أي ع = −٣س ، حيث س القيمة الأصلية وع القيمة الجديدة نحصل على القيم الجديدة كما في الجدول الآتي :

| س | ع = −٣ x س | ع − $\bar{ع}$ | (ع − $\bar{ع}$)$^2$ |
|---|---|---|---|
| ١ | −٣ | ٩ | ٨١ |
| ٢ | −٦ | ٦ | ٣٦ |
| ٣ | −٩ | ٣ | ٩ |
| ٤ | −١٢ | صفر | صفر |
| ٥ | −١٥ | −٣ | ٩ |
| ٦ | −١٨ | −٦ | ٣٦ |
| ٧ | −٢١ | −٩ | ٨١ |
| | −٨٤ | | ٢٥٢ |

١ نحسب الوسط الحسابي الجديد حيث $\bar{ع} = \frac{\sum ع}{ن} = \frac{-٨٤}{٧} = -١٢$

٢ نحسب انحرافات القيم الجديدة عن وسطها الحسابي (ع − $\bar{ع}$)

٣ نربع انحرافات القيم الجديدة (ع − $\bar{ع}$)$^2$ ، ثم نجد $\sum$ (ع − $\bar{ع}$)$^2$

٤ نطبق القانون : $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (ع-\bar{ع})^2}{ن}}$

$$= \sqrt{\frac{٢٥٢}{٧}} = \sqrt{٣٦} = ٦$$

$= ٣ \times ٢ = |-٣| \times ٢ = |-٣| \times$ الانحراف المعياري للقيم الأصلية .

**أي أن قيمة الانحراف المعياري تتغير عند ضرب (أو قسمة) القيم الأصلية بعدد ثابت، والانحراف المعياري للقيم الجديدة يساوي الانحراف المعياري للقيم الأصلية مضروباً في القيمة المطلقة للعدد الثابت، أما التباين الجديد فيساوي التباين الأصلي مضروباً في مربع العدد الثابت**

**نتيجة:**

إذا كان لدينا البيانات $س_1$، $س_2$ ، ... ، $س_ن$ وسطها الحسابي $\bar{س}$ وانحرافها المعياري $\sigma_س$ ، وإذا تم تعديل هذه البيانات باستخدام العلاقة ص = أس + ب حيث أ ، ب اعداد ثابتة وص القيم بعد التعديل وس القيم قبل التعديل فإن الانحراف المعياري بعد التعديل يعطى بالعلاقة : $\sigma_ص = |أ| \times \sigma_س$

## تمارين ومسائل

١ (أ) إذا كانت قيمة الانحراف المعياري لمجموعة من البيانات تساوي صفراً، فماذا يعني ذلك؟

(ب) لقد تم حساب الانحراف المعياري لمجموعة من القيم وكانت القيمة سالبة.

هل يكون ذلك ممكناً؟ وضح ذلك.

٢ أحسب الانحراف المعياري للبيانات التالية:

٨٨٧ ، ٨٨٩ ، ٨٩٤ ، ٩١٣ ، ٩٢٢

(أ) باستخدام الآلة الحاسبة.

(ب) باستخدام القانون.

(جـ) بعد طرح العدد ٩٠٠ من كل قيمة من القيم المعطاه.

٣ إذا علمت أن الانحراف المعياري لعلامات مجموعة من الطلبة في امتحان ما ١٥، فما قيمة الانحراف المعياري بعد إجراء التعديل الآتي:

(أ) إضافة ٥ علامات لكل طالب.

(ب) ضرب علامة كل طالب في ٠,٨

(جـ) قسمة كل علامة على ٣

(د) طرح ٧ من كل علامة

٤ هناك طرق أخرى لإيجاد الانحراف المعياري منها القانون التالي:

$$\sigma = \sqrt{\frac{١}{ن}\left[\sum ت س^{٢} - ن\, \bar{س}^{٢}\right]}$$

حيث ن عدد القيم، ت تكرار الفئة، $\bar{س}$ الوسط الحسابي، استخدم هذا القانون لإيجاد الانحراف المعياري للجدول التكراري التالي الذي يمثّل أطوال ٥٠ شخصاً بالبوصة.

| الطول (بالبوصة) | ٦١–٦٣ | ٦٤–٦٦ | ٦٧–٦٩ | ٧٠–٧٢ | ٧٣–٧٥ | ٧٦–٧٨ | ٧٩–٨١ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٣ | ٥ | ١٢ | ١٥ | ٩ | ٤ | ٢ |

استخدم الإجابة لأجد الانحراف المعياري للأطوال بالسنتيمترات

(البوصة = ٢,٥٤ سم).

ملاحظة: إستخدم الآلة الحاسبة.

# ٥-٢ المئينات

لقد درست سابقاً مقاييس النزعة المركزية ، ومنها الوسيط الذي يعرف بأنه القيمة التي يقل عنها أو يساويها نصف القيم ويزيد عنها أو يساويها نصف القيم الآخر وذلك بعد ترتيب تلك القيم تصاعدياً أو تنازلياً . وإذا ما استخدمت النسبة المئوية في تعريف الوسيط فهو القيمة التي يقل عنها أو يساويها ٥٠٪ من القيم ويزيد عنها أو يساويها ٥٠٪ من القيم ( بعد الترتيب تصاعدياً أو تنازلياً) . وفي هذه الحالة يسمى الوسيط أيضاً المئين ٥٠ ويرمز له بالرمز $م_{٥٠}$ والعدد ٥٠ يسمى الرتبة المئينية وبنفس الطريقة يمكن تعريف المئينات من ١ إلى ٩٩ كما يأتي :

## المئيـــــن:

**إذا تم ترتيب مجموعة من المشاهدات تصاعدياً فإن القيمة التي يكون أقل منها أو يساويها س٪ من المشاهدات وأعلى منها أو يساويها (١٠٠ – س)٪ من تلك المشاهدات تسمى المئين س ويرمز له بالرمز $م_{س}$ حيث تأخذ س القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٩٩ .**

إن حساب المئينات مفيد في كثير من التطبيقات العملية فقد يقرر معلم إعطاء أحسن ١٠٪ من الطلبة في امتحان الرياضيات جوائز تقديرية ويحتاج بذلك معرفة العلامة الفاصلة التي تحدد من يستحق هذه الجائزة ، أي أنه بحاجة لمعرفة العلامة التي يقل عنها أو يساويها ٩٠٪ من الطلبة. إذن فهو بحاجة لمعرفة المئين ٩٠ .

سيتم شرح كيفية حساب بعض المئينات المشهورة مثل $م_{٢٥}$ ، $م_{٥٠}$ ، $م_{٧٥}$ لجداول التوزيع التكرارية حسابياً وبيانياً، ويُستحسن حساب المئينات عندما يكون عدد القيم كبيراً نسبياً حتى لا يشترك أكثر من مئين بنفس القيمة.

## المئينات للبيانات المبوبة في جداول توزيع تكرارية:

يمكن استخدام التناسب لحساب قيم تقريبية لهذه المئينات كما هو مبين في المثال الآتي :

### مثال (١):

الجدول التكراري المجاور يمثل علامات ٤٠ طالباً في امتحان الإحصاء :

| الفئات | التكرار |
|---|---|
| ٣٠ – ٣٩ | ١ |
| ٤٠ – ٤٩ | ٢ |
| ٥٠ – ٥٩ | ٥ |
| ٦٠ – ٦٩ | ١١ |
| ٧٠ – ٧٩ | ١٤ |
| ٨٠ – ٨٩ | ٥ |
| ٩٠ – ٩٩ | ٢ |

احسب لهذا التوزيع التكراري :

أ) $م_{٢٥}$ ب) $م_{٥٠}$ جـ) $م_{٧٥}$ د) الرتبة المئينية للعلامة ٨٦

**الحـــل:** لارتباط المئينات بالتكرار التراكمي ، فإننا نكون جدولاً بالتكرارات التراكمية للحدود الفعلية للفئات كما يأتي :

| الحدود الفعلية للفئات | التكرار التراكمي |
|---|---|
| أقل من ٣٩,٥ | ١ |
| أقل من ٤٩,٥ | ٣ |
| أقل من ٥٩,٥ | ٨ |
| أقل من ٦٩,٥ | ١٩ |
| أقل من ٧٩,٥ | ٣٣ |
| أقل من ٨٩,٥ | ٣٨ |
| أقل من ٩٩,٥ | ٤٠ |

م٢٥ ← → ١٠

### أ) المئين ٢٥ ($م_{٢٥}$)

حيث أن الرتبة المئينية تساوي ٢٥ فإن عدد القيم التي تقل عن $م_{٢٥}$ يساوي $\frac{٢٥}{١٠٠} \times ٤٠ = ١٠$ قيم

بما أن عدد القيم التي تقل عن ٥٩,٥ يساوي ٨ قيم وعدد القيم التي تقل عن ٦٩,٥ يساوي ١٩ قيمة، إذن القيمة العاشرة تقع بين ٥٩,٥ و ٦٩,٥ وباستخدام التناسب، نجد أن :

$$\frac{م_{٢٥} - ٥٩,٥}{٦٩,٥ - ٥٩,٥} = \frac{١٠ - ٨}{١٩ - ٨}$$

$$\frac{م_{٢٥} - ٥٩,٥}{١٠} = \frac{٢}{١١}$$

$$١١(م_{٢٥} - ٥٩,٥) = ٢ \times ١٠$$

$$م_{٢٥} - ٥٩,٥ = \frac{٢٠}{١١}$$

$$م_{٢٥} = ٥٩,٥ + ١,٨ = ٦١,٣$$

أي ٢٥٪ من العلامات تقل عن العلامة ٦١,٣

**ب** **$م_{٥٠}$ (الوسيط):**

عدد القيم التي تقل عن $م_{٥٠}$ يساوي $\frac{٥٠}{١٠٠} \times ٤٠ = ٢٠$ قيمة

| الحدود الفعلية للفئات | التكرار التراكمي |
|---|---|
| أقل من ٣٩,٥ | ١ |
| أقل من ٤٩,٥ | ٣ |
| أقل من ٥٩,٥ | ٨ |
| أقل من ٦٩,٥ | ١٩ |
| أقل من ٧٩,٥ | ٣٣ |
| أقل من ٨٩,٥ | ٣٨ |
| أقل من ٩٩,٥ | ٤٠ |

$م_{٥٠}$ ٢٠

كما سبق في حساب $م_{٢٥}$ فإن عدد القيم التي هي أقل من ٦٩,٥ يساوي ١٩ قيمة، وعدد القيم التي هي أقل من ٧٩,٥ هو ٣٣ قيمة، إذن القيمة العشرون تقع بين ٦٩,٥ ، ٧٩,٥ وباستخدام التناسب نجد أن :

$$\frac{م_{٥٠} - ٦٩,٥}{٧٩,٥ - ٦٩,٥} = \frac{٢٠ - ١٩}{٣٣ - ١٩}$$

$$\frac{م_{٥٠} - ٦٩,٥}{١٠} = \frac{١}{١٤}$$

$$م_{٥٠} - ٦٩,٥ = \frac{١٠}{١٤}$$

$$م_{٥٠} = ٦٩,٥ + \frac{١٠}{١٤}$$

$$م_{٥٠} = ٦٩,٥ + ٠,٧$$

$$م_{٥٠} = ٧٠,٢$$

أي أن ٥٠٪ من العلامات تقل عن العلامة ٧٠,٢

**ج** $م_{٧٥}$ : عدد القيم التي تقل عن $م_{٧٥}$ يساوي $\frac{٧٥}{١٠٠} \times ٤٠ = ٣٠$ قيمة

| | التكرار التراكمي | الحدود الفعلية للفئات | |
|---|---|---|---|
| | ١ | أقل من ٣٩,٥ | |
| | ٣ | أقل من ٤٩,٥ | |
| | ٨ | أقل من ٥٩,٥ | |
| ٣٠ | ١٩ | أقل من ٦٩,٥ | $م_{٧٥}$ |
| | ٣٣ | أقل من ٧٩,٥ | |
| | ٣٨ | أقل من ٨٩,٥ | |
| | ٤٠ | أقل من ٩٩,٥ | |

باستخدام التناسب كما سبق فإن :

$$\frac{م_{٧٥} - ٦٩,٥}{٧٩,٥ - ٦٩,٥} = \frac{٣٠ - ١٩}{٣٣ - ١٩} = \frac{١١}{١٤}$$

$$١٤(م_{٧٥} - ٦٩,٥) = ١٠ \times ١١$$

$$م_{٧٥} - ٦٩,٥ = \frac{١٠ \times ١١}{١٤}$$

$$م_{٧٥} = ٦٩,٥ + \frac{١٠ \times ١١}{١٤}$$

$$= ٦٩,٥ + ٧,٩ = ٧٧,٤$$

أي ٧٥٪ من العلامات تقل عن العلامة ٧٧,٤

**د** **الرتبة المئينية للقيمة ٨٦:** القيمة ٨٦ تقع بين ٧٩,٥ ، ٨٩,٥ وباستخدام التناسب فإن :

| | التكرار التراكمي | الحدود الفعلية للفئات | |
|---|---|---|---|
| | ١ | أقل من ٣٩,٥ | |
| | ٣ | أقل من ٤٩,٥ | |
| | ٨ | أقل من ٥٩,٥ | |
| | ١٩ | أقل من ٦٩,٥ | |
| ك | ٣٣ | أقل من ٧٩,٥ | ٨٦ |
| | ٣٨ | أقل من ٨٩,٥ | |
| | ٤٠ | أقل من ٩٩,٥ | |

$$\frac{٨٩,٥ - ٧٩,٥}{٨٦ - ٧٩,٥} = \frac{٣٨ - ٣٣}{ك - ٣٣}$$

$$\frac{١٠}{٦,٥} = \frac{٥}{ك - ٣٣}$$

$$ك - ٣٣ = \frac{٥ \times ٦,٥}{١٠}$$

ك = ٣٣ + ٣,٢٥ = ٣٦,٢٥ عدد القيم التي تقل عن ٨٦

وعليه فإن نسبة القيم التي تقل عن ٨٦ تساوي

$\frac{٣٦,٢٥}{٤٠}$ x ١٠٠٪ = ٩٠,٦٪ أي أن الرتبة المئينية للعلامة ٨٦ هي ٩١٪ تقريباً.

كذلك يمكن إيجاد المئينات باستخدام الرسم البياني للتكرار المتجمع الصاعد كما في المثال الآتي:

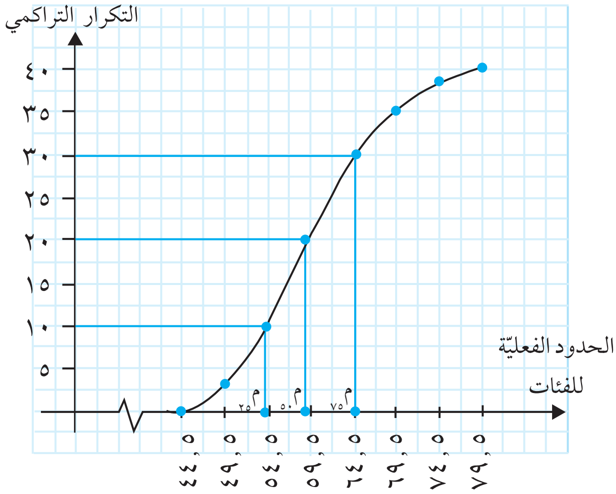
**مثال (٣):** أوجد المئينات ٢٥ ، ٥٠ ، ٧٥ بيانياً للبيانات في الجدول التكراري المقابل، والتي تمثل أوزان مجموعة من الطلبة لأقرب كغم. وما الرتبة المئينية للوزن ٧٢ كغم؟

| فئات الأوزان | التكرار |
|---|---|
| ٤٥ – ٤٩ | ٣ |
| ٥٠ – ٥٤ | ٨ |
| ٥٥ – ٥٩ | ١٠ |
| ٦٠ – ٦٤ | ٩ |
| ٦٥ – ٦٩ | ٥ |
| ٧٠ – ٧٤ | ٣ |
| ٧٥ – ٧٩ | ٢ |

**الحل:** نكون جدول التوزيع التكراري التراكمي الآتي:

| الحدود الفعلية للفئات | التكرار التراكمي |
|---|---|
| أقل من ٤٤,٥ | صفر |
| أقل من ٤٩,٥ | ٣ |
| أقل من ٥٤,٥ | ١١ |
| أقل من ٥٩,٥ | ٢١ |
| أقل من ٦٤,٥ | ٣٠ |
| أقل من ٦٩,٥ | ٣٥ |
| أقل من ٧٤,٥ | ٣٨ |
| أقل من ٧٩,٥ | ٤٠ |

نرسم منحنى التكرار التراكمي الصاعد حيث الحدود الفعلية للفئات على المحور الإفقي والتكرار التراكمي على المحور الرأسي . أنظر الشكل (٣-١)



الشـــكل (٥-١)

لإيجاد $م_{٢٥}$ بيانياً نحسب عدد المشاهدات التي تقل عن $م_{٢٥}$ ويساوي

$$\frac{٢٥}{١٠٠} \times ٤٠ = ١٠$$ مشاهدات .

ننزل عموداً من المحور الرأسي عند التكرار التراكمي ١٠ على منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومن النقطة التي يتقاطع فيها العمود النازل مع المنحنى ننزل عموداً على المحور الأفقي والذي يمثل فئات الأوزان ونقطة التقاطع تكون هي قيمة $م_{٢٥}$ ومن الشكل فإن :

$م_{٢٥}$ = ٥٤ كغم تقريباً .

بالمثل يمكن إيجاد كل من $م_{٥٠}$ و $م_{٧٥}$:

$م_{٥٠}$ = ٥٩ كغم تقريباً

$م_{٧٥}$ = ٦٤,٥ كغم تقريباً .

**لإيجاد الرتبة المئينية للوزن ٧٢ كغم:**

نقيم عموداً من المحور الأفقي عند الوزن ٧٢ كغم ليتقاطع مع منحنى التكرار المتجمع الصاعد في نقطة، ننزل منها عموداً على المحور الرأسي، والذي يمثل عدد المشاهدات التي تقل عن الوزن ٧٢ كغم، ومن الرسم نجد أن عدد المشاهدات التي تقل عن ٧٢ يساوي ٣٦ تقريباً .

إذن الرتبة المئينية = $\frac{٣٦}{٤٠} \times ١٠٠\% = ٩٠\%$

## تدريبات صفّية

١ يمثل الجدول الآتي عدد أيام الغياب لمجموعة من العمال في إحدى الشركات:

| فئات أيام الغياب | ١–٤ | ٥–٨ | ٩–١٢ | ١٣–١٦ | ١٧–٢٠ | ٢١–٢٤ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد العمال | ٢٠ | ١٨ | ١٥ | ١١ | ٩ | ٥ |

أجد كلاً من: $م_{٢٥}$ ، $م_{٥٠}$ ، $م_{٧٥}$ :

أ) حسابياً.

ب) بيانياً.

٢ يمثل الجدول الآتي الدخل العام السنوي بالدنانير لمجموعة من العائلات:

| فئات الدخل | عدد العائلات |
|---|---|
| ٠ – ٩٩٩ | ٣٢ |
| ١٠٠٠–١٩٩٩ | ٤٣ |
| ٢٠٠٠–٢٩٩٩ | ٧٥ |
| ٣٠٠٠–٣٩٩٩ | ٧٤ |
| ٤٠٠٠–٤٩٩٩ | ٤٠ |
| ٥٠٠٠ – ٥٩٩٩ | ٣٦ |

أ) أحسب $م_{٢٥}$ ، $م_{٥٠}$ ، $م_{٧٥}$.

ب) ما عدد العائلات التي يقل دخلها عن $م_{٢٥}$.

جـ) ما عدد العائلات التي يزيد دخلها عن $م_{٧٥}$.

د) إذا أُعفيت من الضريبة العائلات ذات الدخل الذي يقل عن $م_{٢٥}$، فما الدخل الأعلى لهذه العائلات؟

## تمارين ومسائل

١ كانت درجات الحرارة في إحدى المدن الفلسطينية في أسبوع من شهر شباط مقدّرة بالدرجات المئوية كما يلي : ٣ ، ٢ ، ٥ ، ٢ ، ٧ ، ٠ ، ٢

أحسب كلاً من :

أ المدى .

ب التباين .

جـ الإنحراف المعياري .

٢ إذا كان المدى والتباين لدرجات الحرارة المئوية في مدينة ما خلال أسبوع ١٠ و ٥٠ على الترتيب ، وإذا حُوّلت درجات الحرارة من مئوية إلى فهرنهايتية ، فما قيمة كل من المدى والتباين بعد التحويل؟

$$\text{(ف} = \frac{٩}{٥}\text{ م} + ٣٢\text{)} .$$

٣ الجدول الآتي يمثل التوزيع التكراري للزمن (لأقرب دقيقة) والذي استغرقه ٣٦ طالباً للإجابة عن أسئلة امتحان ما :

| فئات الزمن | ٢٠–٢٤ | ٢٥–٢٩ | ٣٠–٣٤ | ٣٥–٣٩ | ٤٠–٤٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| التكـــرار | ٣ | ٥ | ١٠ | ١٢ | ٦ |

أجد :

أ المدى .

ب التباين والانحراف المعياري .

جـ المئين ٢٥ حسابياً .

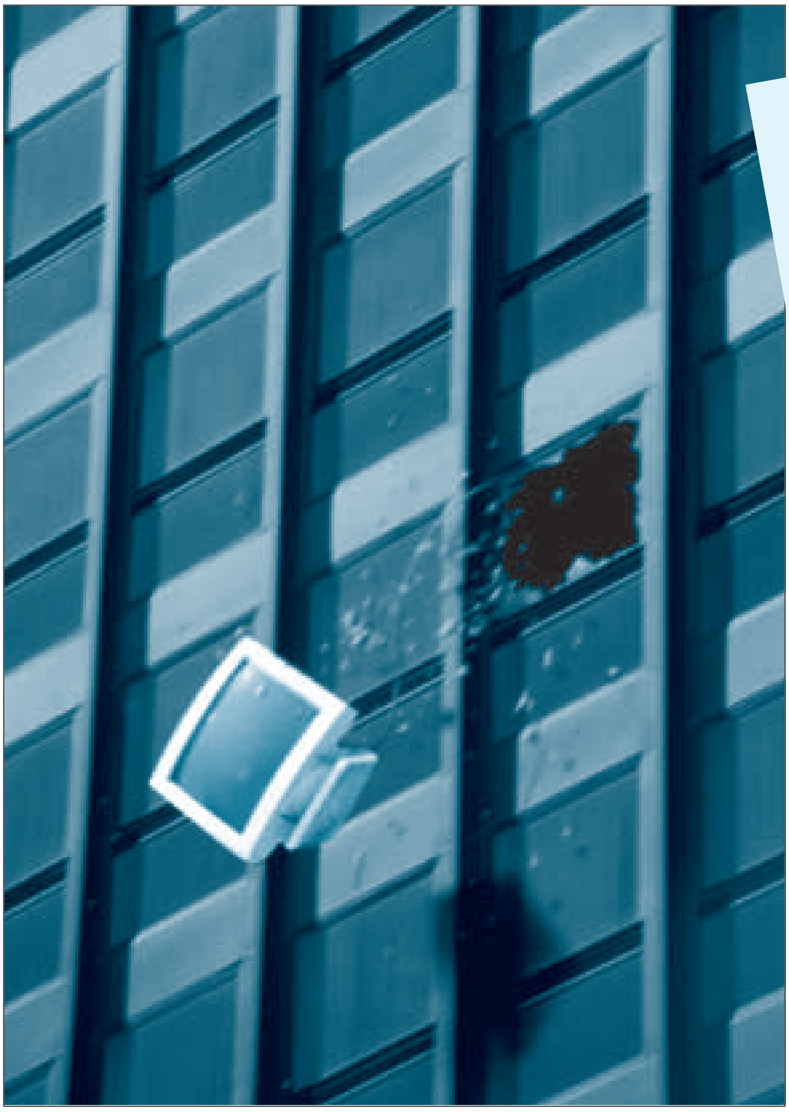
د المئين ٥٠ بيانياً .

هـ المئين ٧٥ بيانياً

و الرتبة المئينية للزمن ٣٦ دقيقة .

# ملحق*

# تطبيقات حاسوبيّة



* هذا الملحق اختياري.

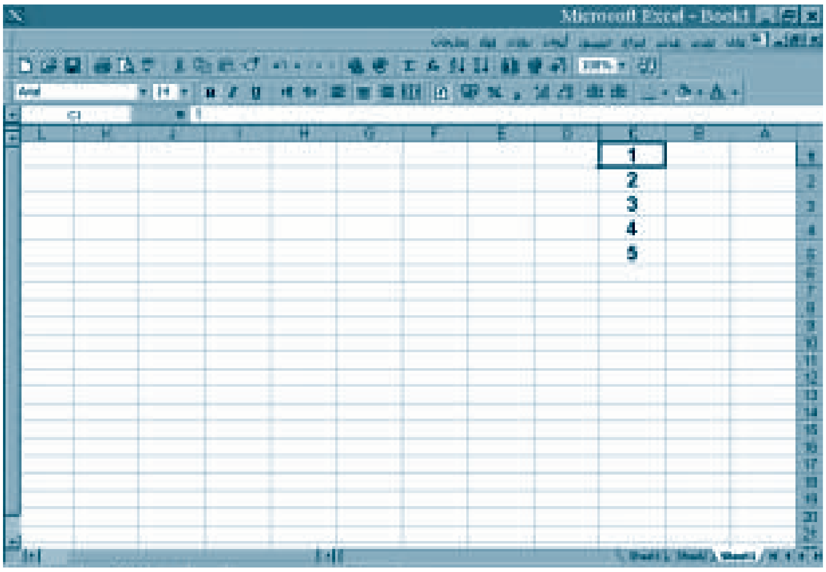
يمكن استخدام برمجيات أخرى متعددة في تعلّم التطبيقات

# حساب الانحراف المعياري

لحساب الانحراف المعياري، باستخدام برنامج *Excel* مثلاً، ندرس المثال الآتي:

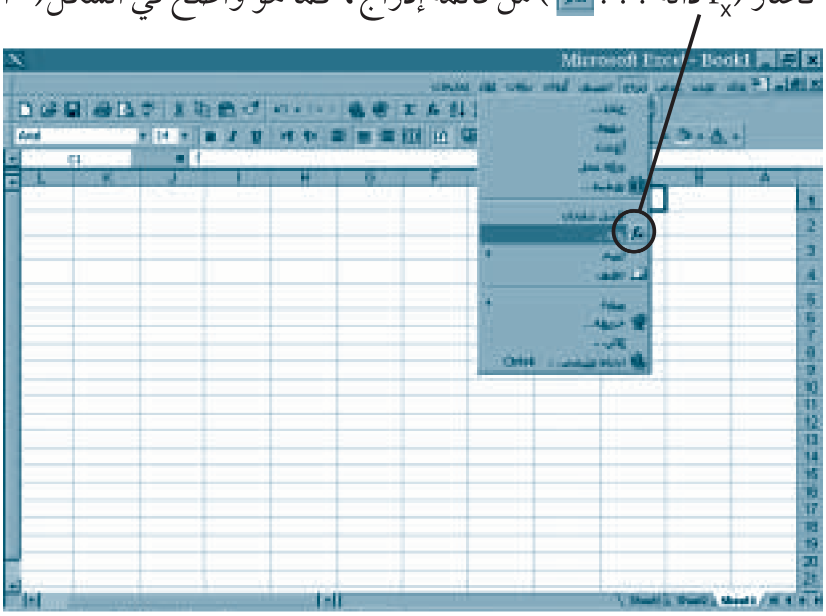
**مثـــال:** احسب الانحراف المعياري للقيم: ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

**الحــل:** (١) اكتب القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ في أحد الأعمدة، أو أحد الصفوف، الشكل (٩)، حيث كتبت الأعداد في الخلايا C1, C2, C3, C4, C5 أو كما تكتب (C1: C5)



الشكل (٩)

(٢) نختار ($f_x$ دالة . . . ) من قائمة إدراج، كما هو واضح في الشكل (١٠).

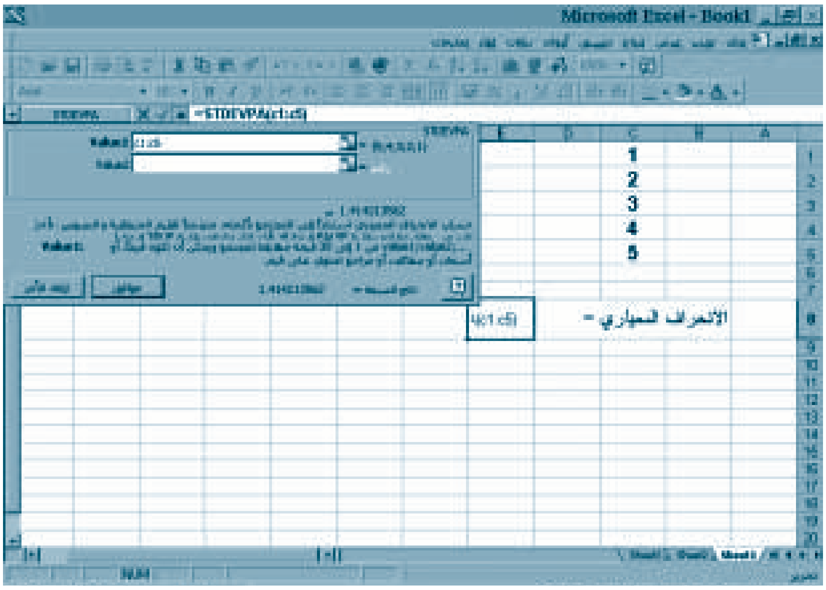


الشكل (١٠)

٣ يظهر صندوق الحوار (لصق دالة)، نختار فئة الدالة (إحصاء)، ومن ثم نختار اسم الدالة ( STDEVP)، وهي اختصار للانحراف المعياري، ونضغط موافق. انظر الشكل (١١).

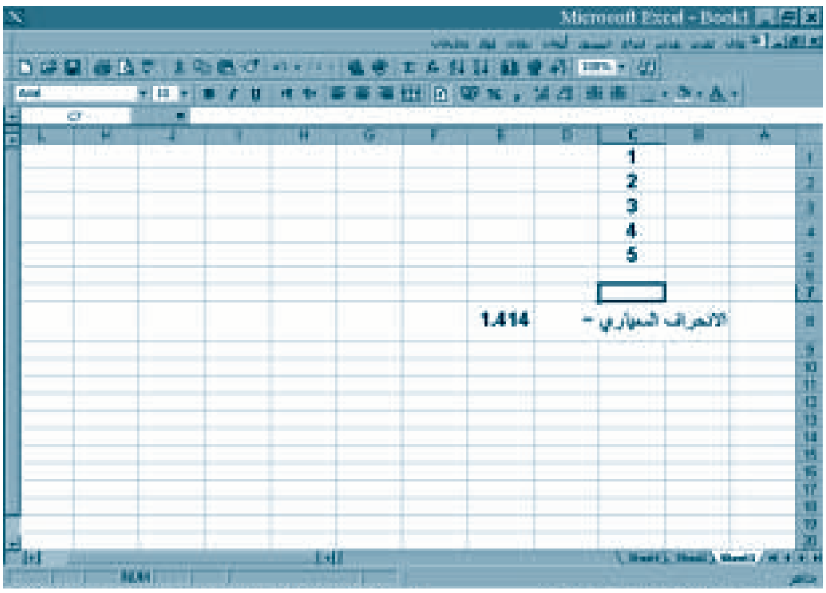
الشكل(١١)

٤ يظهر الشكل(١٢)، ونكتب في السطر الأول (C1: C5) وأحياناً تكون مكتوبة، ونضغط موافق. فيُكتب على الشاشة، ناتج الحسابات أو قيمة الانحراف المعياري.




الشكل(١٢)

٥ الشكل (١٣)، يُوضح أن قيمة الانحراف المعياري = ١,٤١٤ وهي قيمة $\sqrt{٢}$

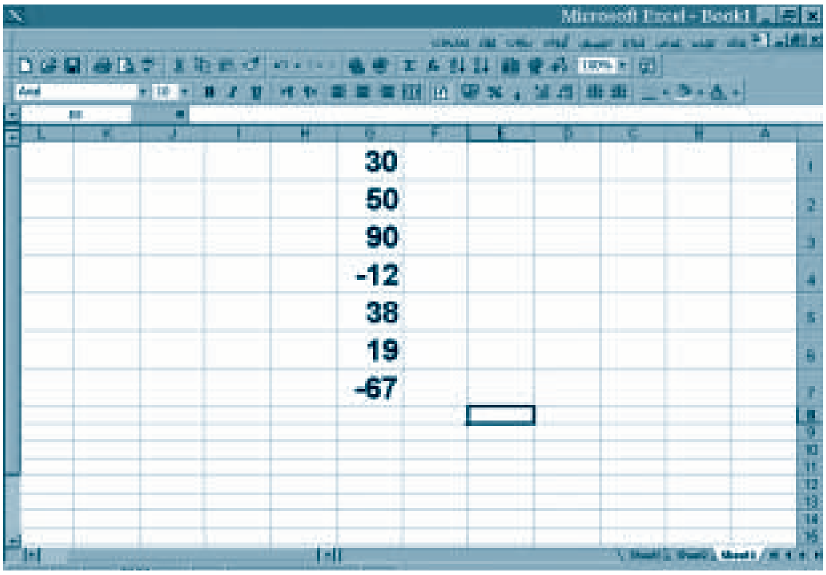



الشكل(١٣)

## أنشـــــطة

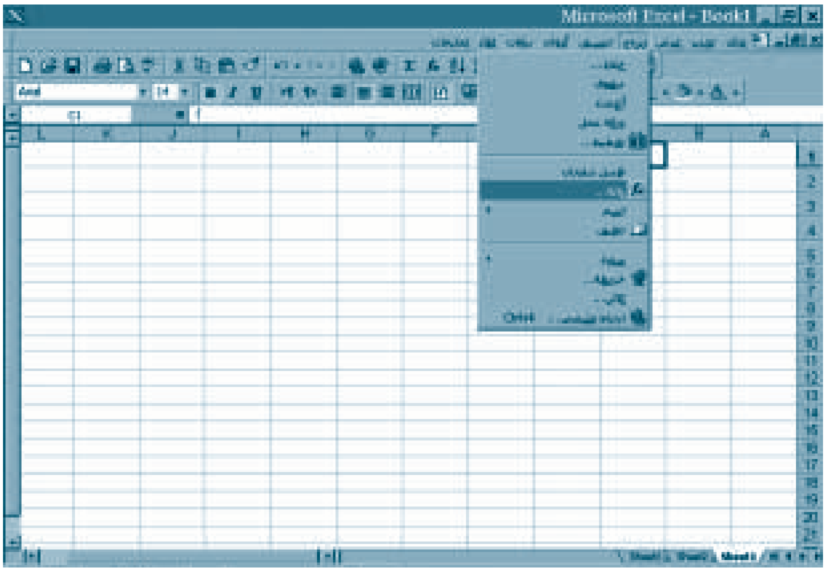
١ باستخدام الحاسوب وبرنامج *Excel* ، أكمل باقي الخطوات الآتية لحساب الانحراف المعياري للقيم : ٣٠ ، ٥٠ ، ٩٠ ، -١٢ ، ٣٨ ، ١٩ ، -٦٧

### الخطوة الأولى:




الشكل (١٤)

### الخطوة الثانية:

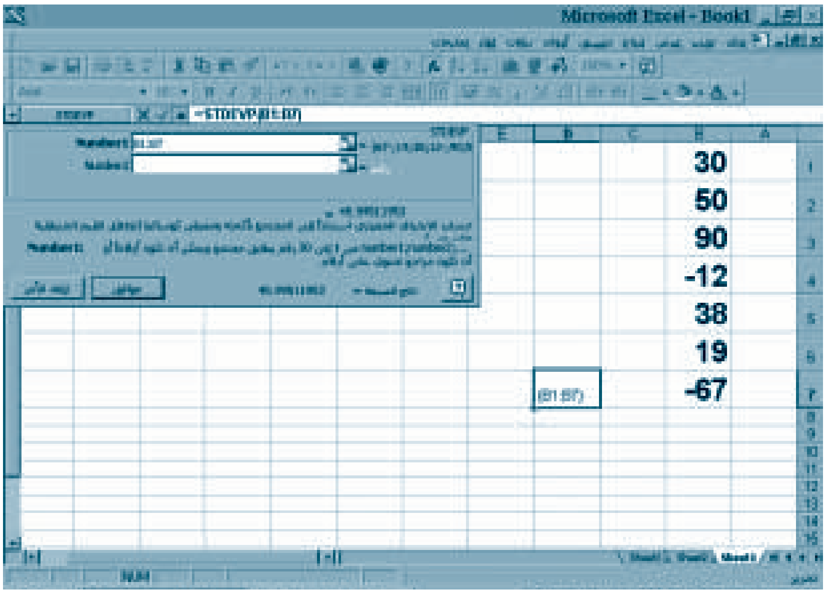



الشكل (١٥)

**الخطوة الثالثة:**

الشكل(١٦)

**الخطوة الرابعة:**



الشكل(١٧)

٢ باستخدام الحاسوب وبرنامج *Excel* ، احسب الانحراف المعياري لكل من :

أ) ٢١ ، ٥٨ ، –١٣ ، ٣٠ ، ١٢٨ ، ٧٩ ، ٢٧٨ ، ٩٠١

(أدخل القيم في العمود A )

ب) –٨٣ ، ١٩٧ ، ٢٠٠١ ، –٣٨ ، ٣٤ ، ٥٧٦ ، –٣١٤

(أدخل القيم في الصف ٤)

جـ) ٢,٣٨ ، –٤,٢٤٧ ، ٥٦,٩١٤ ، –١٠٠٠,٩٩ ، ٤١٨,٣٢

(أدخل القيم في أي صف أو عمود )

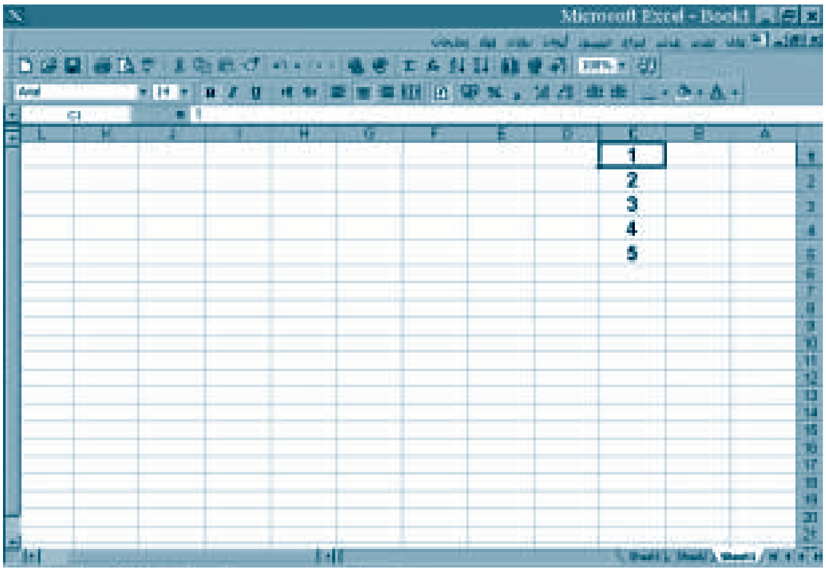
# حساب التبـــاين

لحساب التباين، باستخدام برنامج *Excel* مثلاً، ندرس المثال الآتي:

**مثـــال:** احسب التباين للقيم: ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

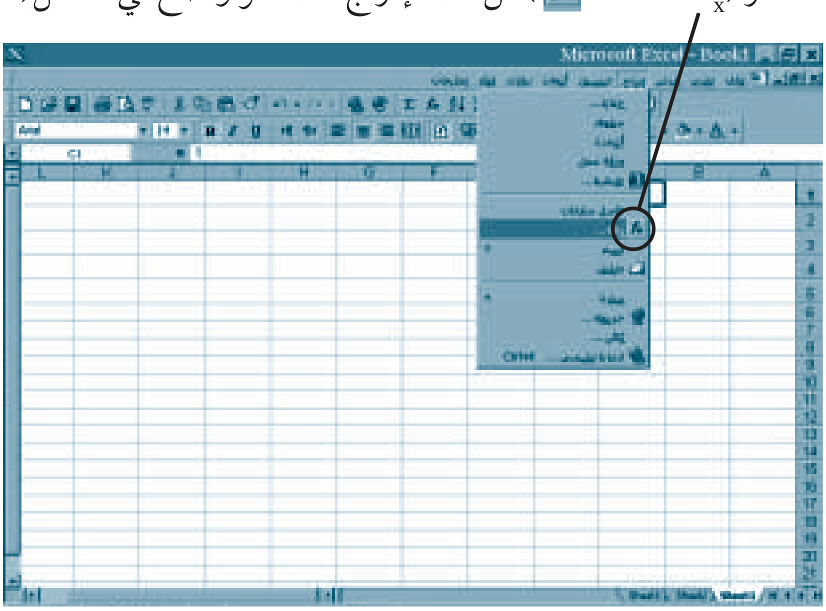
**الحـل:**

١ اكتب القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ في أحد الأعمدة، أو أحد الصفوف، الشكل(١)، حيث كُتبت الأعداد في الخلايا: C5, C4, C3, C2, C1 أو كما تكتب (C1: C5)




الشكل(١)

٢ نختار ( $f_x$ دالة . . . ) من قائمة إدراج، كما هو واضح في الشكل(٢):

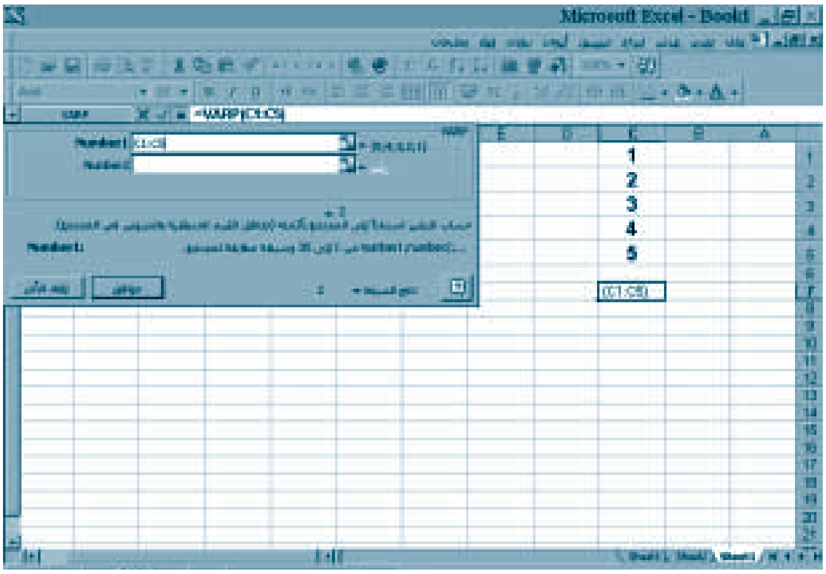



الشكل(٢)

٣ يظهر صندوق الحوار (لصق دالة)، نختار فئة الدالة (إحصاء)، ومن ثم نختار اسم الدالة (VARP) وهي اختصار للتباين، ونضغط موافق. انظر الشكل (٣).

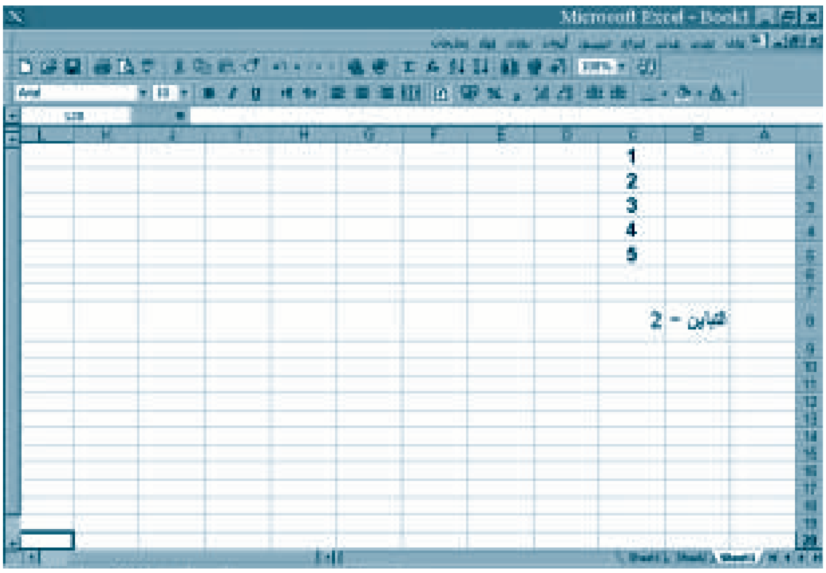
الشكل(٣)

٤ يظهر الشكل (٤) ، ونكتب في السطر الأول (C1: C5) وأحياناً تكون مكتوبة، ونضغط موافق، فيكتب على الشاشة ، ناتج الحسابات أو قيمة التباين .




الشكل(٤)

٥ انظر الشكل (٥) ، الذي يوضح أن قيمة التباين هو ٢ .



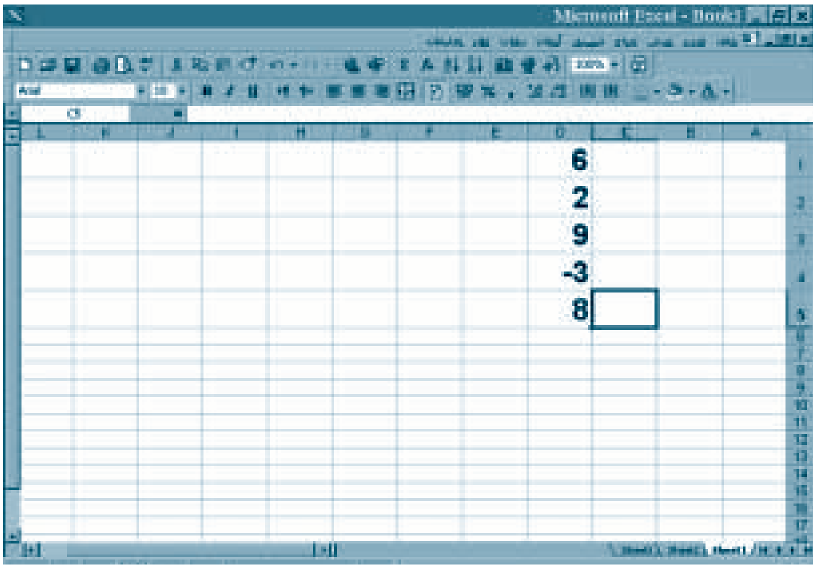

الشكل(٥)

## أنشــــطة

**١** باستخدام الحاسوب وبرنامج *Excel* ، أكمل باقي الخطوات الآتية لحساب التباين للقيم :

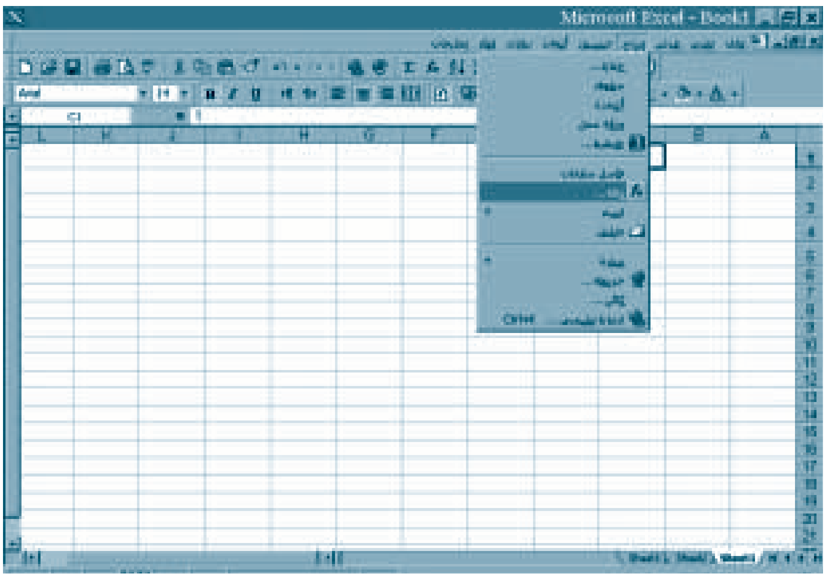
٦ ، ٢ ، ٩ ، -٣ ، ٨

### الخطوة الأولى:




الشكل(٦)

### الخطوة الثانية:




الشكل(٧)

**الخطوة الثالثة:**

الشكل(٨)

٢ باستخدام الحاسوب وبرنامج *Excel* ، احسب التباين لكل من :

أ ٢٧ ، ٢٤ ، ٢٨ ، −٢ ، صفر ، ١١
(أدخل القيم في العمود F )

ب ٩ ، ٢٤ ، ٨ ، ٧٠ ، −١٠٠ ، ١٠٠
(أدخل القيم في الصف ٩)

جـ ٤٠ ، ٨٠ ، −٤٠ ، −٨٠ ، ١٢٠ ، ٩٠٠
(أدخل القيم في أي صف أو عمود )

## ساهم في انجاز هذا العمل:

**لجنة المناهج الوزارية :(قرار الوزير بتاريخ ٢٣/١١/٢٠٠٢م)**

– د. نعيم أبو الحمص (رئيساً) – جهاد زكارنة (عضواً) –زينب الوزير (عضواً)
– د. عبد الله عبد المنعم (نائب الرئيس) –هشام كحيل (عضواً) – د. صلاح ياسين (أمين السر)

**اللجنة الفنية للمتابعة:**

– د. صلاح ياسين (منسقاً) – د. غازي أبو شرخ(عضواً) – أ. منير الخالدي (عضواً)
– د. عمر أبو الحمص (عضواً) – أ. صبحي الكايد (عضواً) –مديرالقياس والتقويم (عضواً)
– د. هيفاء الآغا(عضواً) – أ. جميل أبو سعدة (عضواً)

**المشاركون في إقرار الكتب الجديدة للمباحث العلمية:**

– وليد الزاغة (منسقا) – حسني صادق – جمان قرمان
– د. عمر ابو الحمص (مقرراً) – علي خليل حمد – حامد خميس
– بصري صالح – محمد عالية – جمال طريف
– د. علي خليــفة

**المشاركون في ورشات العمل لكتاب الرياضيات للصف التاسع الأساسي:**

– ختام سكّر – لبنى ابو باشا – مائسة شاهين
– محمد عوّاد – أمل صوفان – حسني مشاقي
– هاني أبو صفيّة

**المشاركون في ورشات العمل للطبعة الثانية التجريبية:**

– نقين حمّاد – رنا خلف
– محمود خصيب – خالد أنجاص

تم الجزء الأول بحمد الله